אינפי 1 החממה תרגול 11

3 בינואר 2021

1 מיון נקודות אי־רציפות

תהי a נקודת אי רציפות של f. אז היא:

- סליקה, אם קיים הגבול $\lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$ ו־$\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$. למשל:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \neq 0 \\ e^2 & x = 0 \end{cases}$$

- קפיצה, אם הגבולות החד צדדיים קיימים, סופיים ושונים: $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$.
- עיקרית, אחרת: אם לפחות אחד הגבולות החד צדדיים לא קיימים (במובן הצר).

תרגילים:

1. מיינו את נק' אי הרציפות של הפונקציות הבאות:

(א) $f(x) = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}}$. הנקודות הבעייתיות הן: $0, \pm 1$ (בשאר הנקודות מקבלים הרכבה של רציפות ולכן רציפה). נבדוק אם יש שורש למכנה:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-x}{x(x-1)} = -\frac{1}{x(x-1)}$$

זה לא מתאפס. נשים לב שבעצם הפונקציה היא (חוץ מנק' אלו):

$$\frac{\frac{x+1-x}{x(x+1)}}{\frac{x-1-x}{x(x-1)}} = -\frac{x(x-1)}{x(x+1)} = -\frac{x-1}{x+1}$$

לכן נקבל:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} -\frac{x-1}{x+1} = 1$$

הגבול קיים וסופי, ולכן 0 נק' אי־רציפות סליקה.
בדומה:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} -\frac{x-1}{x+1} = 0$$

ולכן 1 נק' אי־רציפות סליקה.
עבור -1 נשים לב:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} -\frac{x-1}{x+1} = \infty$$

ולכן -1 זו נק' אי־רציפות עיקרית.

(ב) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{\ln(x^2)}\right)$.
הנק' הבעייתיות הן: $0, \pm 1$.עבור 0, נשים לב:

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{\ln(x^2)}\right) = 0$$

כי לכל סדרה $x_n \to 0$ נקבל $\ln(x_n^2) \to -\infty$ ואז $\frac{1}{\ln(x_n^2)} \to 0$ וזהו. ולכן 0 אי־רציפות סליקה.
± 1 אותו דבר בגלל ההעלאה בריבוע. נבחן את $\lim_{x\to 1^+} f(x)$. ניקח שתי סדרות:

$$x_n = \sqrt{e^{\frac{1}{\pi n}}}$$

$$y_n = \sqrt{e^{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}}}$$

ונקבל:

$$f(x_n) = \sin\left(\frac{1}{\ln e^{\frac{1}{\pi n}}}\right) = \sin \pi n = 0 \to 0$$

$$f(y_n) = \sin\left(\frac{1}{\ln e^{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}}}\right) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1 \to 1$$

ולכן הגבול מימין לא קיים, ולכן זו נק' אי־רציפות עיקרית. כנ"ל בדיוק -1.

(ג) $f(x) = \frac{|x|}{\sin x}$
פתרון: הנק' הבעייתיות הן $x = \pi n$. נשים לב שאם $n \neq 0$ אז

$$\lim_{x\to \pi n^+} f(x) = \pm\infty$$

(מקבלים ∞ עבור $n = 2k$ ו־$-\infty$ עבור $n = 2k-1$), ולכן אלו נק' עיקריות.
עבור $x = 0$ נבדוק גבולות חד צדדיים:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{\sin x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{\sin x}=-1$$

קיבלנו גבולות חד צדדיים קיימים סופיים ושונים, ולכן זו נק' מסוג ראשון - קפיצה.

2 ערך הביניים + ויירשטראס

משפטים:

- תהי f רציפה בקטע $[a,b]$, ויהי y_0 ערך בין $f(a)$ לבין $f(b)$ אזי קיים $x_0\in[a,b]$ כך ש- $f(x_0)=y_0$.
- פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$, מקבלת בו מינימום ומקסימום. כלומר, קיימים $x_1,x_2\in[a,b]$ כך ש-

$$\forall x\in[a,b]:f(x)\le f(x_1)$$

$$\forall x\in[a,b]:f(x)\ge f(x_2)$$

תרגילים:

1. תהי f רציפה ב-$[0,2]$ כך ש- $f(2)=3$. הוכיחו שקיימת נקודה $a\in[0,2]$ כך ש- $f(a)=\frac{1}{a}$.

פתרון: נגדיר $h(x)=xf(x)$ ונראה שיש נק' $a\in[0,2]$ עבורה $h(a)=1$. נשים לב:

$$h(0)=0\cdot f(0)=0$$

$$h(2)=2\cdot f(2)=6$$

ולכן לפי ערך הביניים יש $a\in[0,2]$ כך ש- $h(a)=1$ ואז

$$1=a\cdot f(a)$$

מש"ל.

2. תהיינה f,g רציפות ב- $[a,b]$ כך ש- $f[[a,b]]=[a,b]$ ו- $g[[a,b]]\subseteq[a,b]$. הוכיחו שיש $x_0\in[a,b]$ כך ש- $f(x_0)=g(x_0)$.

פתרון: נגדיר $h(x)=f(x)-g(x)$. h רציפה כהפרש רציפות. יש x_1 כך ש-

$f(x_1) = b$, ומתקיים $g(x_1) \le b$, וכן יש x_2 כך ש־ $f(x_2) = a$ ומתקיים $g(x_2) \ge a$.
כעת נשים לב:

$$h(x_1) = f(x_1) - g(x_1) = b - g(x_1) \ge 0$$

$$h(x_2) = f(x_2) - g(x_2) = a - g(x_2) \le 0$$

ולכן יש $x_0 \in [a, b]$ כך ש־$h(x_0) = 0$, מה שאומר: $f(x_0) = g(x_0)$.

3. תהיינה f, g רציפות ב־$[0, 1]$, ומתקיים:

$$\sup_{x\in[0,1]} \{f(x)\} = \sup_{x\in[0,1]} \{g(x)\}$$

הוכיחו שיש $x_0 \in [0, 1]$ כך ש־ $f(x_0) = g(x_0)$.
פתרון: לפי ויירשטראס כיון שהפונקציות רציפות בקטע סגור אז הן מקבלות בו מקסימום, ולכן יש $a, b \in [0, 1]$ כך ש־

$$f(a) = \max f(x) = \sup\{f(x)\} = \sup\{g(x)\} = \max g(x) = g(b)$$

בה"כ $a \le b$ ולכן, נגדיר $h(x) = f(x) - g(x)$ ונקבל:

$$h(a) = f(a) - g(a) = \max g(x) - g(a) \ge 0$$

$$h(b) = f(b) - g(b) = f(b) - \max f(x) \le 0$$

וסיימנו לפי ערך הביניים.

4. נתונה f כך שלכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x - a| < \epsilon$ אז $|f(x) - f(a)| < \delta$.
   (א) האם f רציפה ב־a?
   (ב) איזו תכונה של f מבטא תנאי זה?
   פתרון: א. לא, למשל ניקח

$$f(x) = \begin{cases} 5 & x \ne a \\ 2 & x = a \end{cases}$$

ואז לכל $\epsilon > 0$ ניקח $\delta = 4$ אז לכל x (ובפרט אם $|x - a| < \epsilon$) מתקיים: $|f(x) - f(a)| < \delta$, אך כמובן ש־f לא רציפה ב־a.

5. $\lim (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ תהי $x_n \to 0$ אז

$$\lim_{n\to\infty} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$$