

חשבון אינפיניטסימלי 4 (88-236-01/05)
מועד ב', תשע"ד

מרצים: פרופ' אנדריי לרנר, ד"ר ודים זאב אוסטפנקו
משך המבחן: 2.5 שעות
ללא שימוש בחומר עזר (כולל מחשבון כיס)

ענו על 5 מתוך 6 השאלות הבאות. כל שאלה שווה ל-21 נקודות.

1. תהי $M \subset \mathbb{R}^3$ קבוצה המוגדרת ע"י

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^4 + z^3 = 1, 2x - y + 3z = 0\}$$

(א) האם קבוצה זו היא יריעה? אם כן, מהו מימדה?
(ב) מצאו מרחב משיק ל- M בנקודה $(1, -1, -1)$.

2. נתונה התבנית $\omega = x_1^2 x_3 dx_1 \wedge dx_2 + x_2 x_3 dx_1 \wedge dx_3$ ב- \mathbb{R}^3 וההעתקה $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_1 y_2, y_2 y_3, y_4)$$

מצאו את $F^*(d\omega)$, $F^*(\omega)$, $d\omega$.

3. נתונה התבנית

$$\omega = (2x_1 x_2 + x_2^2 + x_2 x_3^2) dx_1 + (x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_1 x_3^2) dx_2 + 2x_1 x_2 x_3 dx_3$$

א. בדקו ש- ω סגורה.

ב. קבעו האם ω מדוייקת. אם כן, מצאו פונקציה f כך ש- $df = \omega$.
ג. חשבו את $\int_{\Gamma} \omega$ עבור קטע הישר שבין הנקודות $(-1, 1, -1)$ ו- $(2, 3, 4)$.

4. חשבו את אורך העקומה $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} = 1\}$.

5. חשבו את

$$\iint_S (x + y^2) dy \wedge dz + (y + z^2) dz \wedge dx + (z + x^2) dx \wedge dy$$

כאשר

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 1\}$$

עם נורמל חיצוני.

6. יהי M משטח עם האטלס $A = \{(F_1, U_1), (F_2, U_2)\}$. נניח $x \in F_1(U_1) \cap F_2(U_2)$. הגדירו מרחב משיק $T_x(M)$ והראו שמרחב הזה אינו תלוי בבחירת המפה (F_i, U_i) .

בהצלחה!