חקב"צ - הרצאה 6

8 בדצמבר 2011

דואליות - המשך

הבעיה הפרימלית:

$$\begin{aligned} \max\ z &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t} &: \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ \ (i = 1, ..., m) \\ & \quad x_j \ge 0 \end{aligned}$$

הבעיה הדואלית:

$$\begin{aligned} \min\ w &= \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ \text{s.t} &: \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j \ \ (j = 1, ..., n) \\ & \quad y_i \ge 0 \end{aligned}$$

קשרים בין הפרימלית והדואלית

פרימלית		דואלית
מקסימום	$\Longleftrightarrow$	מינימום
אילוץ טבעי ($\geq$ במינימום ו$\leq$ במקסימום)	$\Longleftrightarrow$	משתנה "טבעי" (≤ 0)
אילוץ לא טבעי	$\Longleftrightarrow$	משתנה "לא טבעי" (≥ 0)
אילוץ שוויון	$\Longleftrightarrow$	משתנה לא מאולץ

דוגמה למעבר בין פרימלית לדואלית

הפרימלית:

$$\begin{aligned} \min\ z &= 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \text{s.t} &: 2x_1 + 3x_2 \ge 4 \\ & \quad x_1 - 2x_2 = 2 \\ & \quad -x_1 + 4x_3 \le 3 \\ & \quad x_2 + x_3 \ge -1 \\ & \quad x_{1,2} \ge 0 \end{aligned}$$

(נשים לב שx_3 לא מאולץ)

הדואלית:

$$\begin{aligned} \max\ w &= 4y_1 + 2y_2 + 3y_3 - y_4 \\ \text{s.t} &: 2y_1 + y_2 - y_3 \le 3 \end{aligned}$$

$$3y_1 - 2y_2 + y_4 \leq 2$$
$$4y_3 + y_4 = -1$$
$$y_1,\, y_4 \geq 0$$
$$y_3 \leq 0$$

ופה y_2 לא מאולץ (כי האילוץ השני בפרימלית הוא אילוץ שוויון).

פתרון של בעיה פרימלית מושג ע"י הדואלית ולהפך, כלומר:

$$\max\ z = \min\ w$$

הצגה מטריציאלית

בעיה (1):

$$\begin{aligned} \max\ z &= cx \\ \text{s.t} \quad &: \quad Ax \leq b \\ & \quad\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

הבעיה הדואלית לה (2):

$$\begin{aligned} \min\ w &= yb \\ \text{s.t} \quad &: \quad yA \geq c \\ & \quad\quad y \geq 0 \end{aligned}$$

כאשר

$$\begin{aligned} c &= (c_1,\, ...,\, c_n) \\ b &= (b_1,\, ...,\, b_m) \\ x &= (x_1,\, ...,\, x_n) \\ y &= (y_1,\, ...,\, y_m) \end{aligned}$$

וA מטריצת המקדמים.

1 משפט הדואליות החלשה

אם x פתרון אפשרי ל(1) וy פתרון אפשרי ל(2), אזי:

$$cx \leq yb$$

כלומר, כל פתרון אפשרי של בעיית מקסימום מהווה חסם תחתון של בעיית מינימום.

הוכחה

x פתרון אפשרי לבעיית המקסימום לכן:

$$Ax \leq b$$

מתקיים $y \geq 0$ ולכן

$$yAx \leq yb$$

בנוסף:

$$yA \geq c$$

מתקיים $x \geq 0$ לכן:

$$yAx \geq cx$$

לכן

$$cx \leq yAx \leq yb$$

והתקבל המשפט:

$$cx \leq yb$$

2 משפט הדואליות החזקה

אם x פתרון אפשרי ל(1) וy פתרון אפשרי ל(2) כך שמתקיים

$$cx = yb$$

אזי x אופטימלי ל(1) וy אופטימלי ל(2).

הוכחה

ניקח x_0 פתרון כלשהו ל(1) אזי

$$cx_0 \leq y_b$$

אך

$$cx = yb$$

לכן

$$cx_0 \leq cx$$

ומכאן x אופטימלי ל(1).

3 משפט

אם לבעיה הפרימלית (1) יש פתרון אופטימלי (חסום) אז גם לבעיה (2) יש פתרון אופטימלי (חסום) ומתקיים:

$$\max\ cx = \min\ yb$$

4 משפט

אם לבעיה הפרימלית (1) יש פתרון לא חסום אזי לבעיה הדואלית (2) אין פתרון אפשרי.

הוכחה

לפי משפט 1

$$\max\ cx \leq yb$$

לכל y אפשרי, ו$\max\ cx \to \infty$ לכן אין פתרון אפשרי לy.

הערה

המשפט מתקיים רק בכיוון אחד, כלומר אם (1) לא חסומה אז ל(2) אין פתרון אבל אם ל(1) אין פתרון אפשרי אז לבעיה (2) אין פתרון <u>או</u> שיש לה פתרון לא חסום.

דוגמה 1

בעיה פרימלית:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t} &: x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_1 - x_2 \le 2 \\ & x_j \ge 0 \end{aligned}$$

הפתרונות האפשריים של הבעיה הם $(3,1)$ ו$(0,0)$.
הבעיה הדואלית:

$$\begin{aligned} \min\ w &= 4y_1 + 2y_2 \\ \text{s.t} &: y_1 + y_2 \ge 2 \\ & y_1 - y_2 \ge 1 \\ & y_i \ge 0 \end{aligned}$$

ולבעיה הדואלית יש פתרונות אפשריים ב$(1,0)$ ו$(1,1)$.
כלומר גם לבעיה הפרימלית וגם לבעיה הדואלית יש פתרונות אפשריים (ז"א ששתיהן חסומות).

דוגמה 2

הבעיה הפרימלית:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t} &: x_1 - x_2 \le 4 \\ & x_1 - x_2 \le 2 \\ & x_j \ge 0 \end{aligned}$$

הבעיה הדואלית:

$$\begin{aligned} \min\ w &= 4y_1 + 2y_2 \\ \text{s.t} &: y_1 + y_2 \ge 2 \\ & -y_1 - y_2 \ge 1 \\ & y_i \ge 0 \end{aligned}$$

הבעיה הדואלית לא אפשרית, אין פתרון שמקיים את שני האילוצים, ז"א שהבעיה הפרימלית אינה אפשרית או אינה חסומה. כיוון שראינו שהפרימלית אפשרית ז"א שהפרימלית אינה חסומה, יש לה אינסוף פתרונות.

דוגמה 3

הבעיה הפרימלית לא אפשרית:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t} &: -x_1 - x_2 \le -4 \\ & x_1 + x_2 \le 2 \\ & x_j \ge 0 \end{aligned}$$

הבעיה הדואלית:

$$\begin{aligned} \min\ w &= -4y_1 + 2y_2 \\ \text{s.t} &: -y_1 + y_2 \ge 2 \\ & -y_1 + y_2 \ge 1 \\ & y_i \ge 0 \end{aligned}$$

הבעיה הדואלית אפשרית (יש אילוץ מיותר).
מצאנו כי הבעיה הדואלית אפשרית אך היא תהיה לא חסומה היות והפרימלית לא אפשרית.

דוגמה 4

הבעיה הפרימלית:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t} &: -x_1 + x_2 \le -4 \\ & \quad x_1 - x_2 \le 2 \\ & \quad x_j \ge 0 \end{aligned}$$

הבעיה הפרימלית לא אפשרית.
הדואלית:

$$\begin{aligned} \min\ w &= 4y_1 + 2y_2 \\ \text{s.t} &: -y_1 + y_2 \ge 2 \\ & \quad y_1 - y_2 \ge 1 \\ & \quad y_i \ge 0 \end{aligned}$$

הבעיה הדואלית גם כן לא אפשרית.

הקשר בין הפתרון האפשרי של הדואלית והפרימלית

בעיה (1):

$$\begin{aligned} \max\ z &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t} &: \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad (i = 1, ..., m) \\ & \quad x_j \ge 0 \quad (j = 1, ..., n) \\ & \quad x_{n+i} \ge 0 \quad (i = 1, ..., m) \end{aligned}$$

בצורה המטריציונית:

$$\begin{aligned} \max\ z &= cx \\ \text{s.t} &: Ax + Ix_s \le b \\ & \quad x \ge 0 \\ & \quad x_s \ge 0 \\ x &= (x_1, ..., x_n) \\ x_s &= (x_{n+1}, ..., x_{n+m}) \end{aligned}$$

משפט החוק המשלים - Complementary Slackness

אם פתרון האופטימלי ל(1) משתנה החוסר x^*_{n+i} באילוץ הi שונה מאפס, אזי המשתנה הדואלי המתאים לו בפתרון האופטימלי $y^*_i = 0$, ולהפך - אם המשתנה הדואלי האופטימלי שונה מ0 כלומר $y^*_i \neq 0$ אזי משתנה החוסר באילוץ הi בבעיה הפרימלית יהיה 0, כלומר $x^*_{n+i} = 0$.
ובאופן מתמטי - לכל i מתקיים:

$$x^*_{n+i} \cdot y_i = 0$$