

פתרון תרגיל בית 8 – אינפי 1

שאלה 1

$$\text{נתבונן בטור } \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+(-1)^n}$$

(א) האם זהו טור לייבניץ? (שימו לב שהעובדה שהמנייה מתחילה מ- $n=2$

אינה פוגעת בהיותו של טור להיות לייבניץ)

(ב) האם הטור מתכנס?

פתרון

(א) $a_n = \frac{1}{n+(-1)^n}$ אינה מונוטונית יורדת ולכן הטור אינו לייבניץ. אכן

$$\text{מתקיים: } a_{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)-1} = \frac{1}{2k} > \frac{1}{2k+1} = a_{2k}$$

(ב) נוכיח שהטור מתכנס. אינטואיציה: הטור שלנו "מזכיר במראה שלו"

$$\text{את טור לייבניץ המתכנס } \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

$$\text{תהיינה } b_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

$$c_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n+(-1)^n}$$

$$c_n - b_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n+(-1)^n} - \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} \right) = \frac{(-1)^{n+1} n - (n+(-1)^n)(-1)^{n+1}}{n(n+(-1)^n)} =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} n - (-1)^{n+1} n - (-1)^{2n+1}}{n(n+(-1)^n)} = \frac{-(-1)^{2n+1}}{n(n+(-1)^n)} = \frac{1}{n(n+(-1)^n)}$$

הטור $\sum_{n=2}^{\infty} (c_n - b_n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+(-1)^n)}$ מתכנס. זה נובע מכך שמדובר

$$\text{בטור חיובי וממבחן ההשוואה הגבולי עם הטור המתכנס } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

אכן, מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n(n+(-1)^n)}} = 1$ (בדקו!). כעת $\sum_{n=2}^{\infty} (c_n - b_n)$ מתכנס

(נניח ל $L \in \mathbb{R}$). טור לייבניץ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס (נניח ל $M \in \mathbb{R}$) ולכן הטור

$$\text{שלנו } \sum_{n=2}^{\infty} c_n = \sum_{n=2}^{\infty} ((c_n - b_n) + b_n) \text{ מתכנס ל } L + M.$$

מש"ל

שאלה 2

קבעו האם הטור מתכנס בהחלט, בתנאי או מתבדר: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2\sqrt{n^4 - n^2}}$.

פתרון

נפשט תחילה את הביטוי $\frac{n}{2\sqrt{n^4 - n^2}}$. מתקיים

$$\frac{n}{2\sqrt{n^4 - n^2}} = \frac{n}{2\sqrt{n^2(n^2 - 1)}} = \frac{n}{2n\sqrt{n^2 - 1}} = \frac{1}{2\sqrt{n^2 - 1}}$$

קל לראות ש

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{n^2 - 1}} = 0$ וכן שהסדרה $\left\{ \frac{1}{2\sqrt{n^2 - 1}} \right\}$ מונוטונית יורדת. מכאן הטור

$$\text{מתכנס עפ"י מבחן לייבניץ. } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2\sqrt{n^4 - n^2}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n^2 - 1}}$$

נראה שהטור לא מתכנס בהחלט. הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n n}{2\sqrt{n^4 - n^2}} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n^2 - 1}}$

מתבדר לפי מבחן השוואה גבולי עם הטור המתבדר $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$, שכן נקבל

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{n^2 - 1}}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \text{ (בדקו!). בסה"כ הטור המקורי שלנו מתכנס בתנאי.}$$

מש"ל

שאלה 3

(א) הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)$ חסום.

הדרכה: הכפילו וחלקו ב- $2 \sin \frac{x}{2}$ והשתמשו בזהות הטריגונומטרית של מכפלת קוסינוס בסינוס.

(ב) הסיקו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$ מתכנס (כאשר $x \neq 2\pi k$).

פתרון

(א) שימו לב נפלה טעות קטנה בשאלה. התנאי $x \neq 2\pi k$ דרוש כבר

בסעיף א' כדי שיתקיים $\sin \frac{x}{2} \neq 0$.

ניעזר בנוסחא $2 \cos \theta \sin \varphi = \sin(\theta + \varphi) - \sin(\theta - \varphi)$. סדרת הסכומים

החלקיים של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)$ היא מהצורה

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \sum_{k=1}^n \frac{\cos(kx) 2 \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^n 2 \cos(kx) \sin \frac{x}{2} = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^n \left(\sin \left(kx + \frac{x}{2} \right) - \sin \left(kx - \frac{x}{2} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\sin(1.5x) - \sin(0.5x) + \sin(2.5x) - \sin(1.5x) + \dots + \sin \left(nx + \frac{x}{2} \right) - \sin \left(nx - \frac{x}{2} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(-\sin(0.5x) + \sin \left(nx + \frac{x}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

(ודאו שאתם מבינים איך האיברים מצטמצמים).

$$\text{לכן } |S_n| = \left| \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(-\sin(0.5x) + \sin \left(nx + \frac{x}{2} \right) \right) \right| \leq \left| \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| (1+1) = \left| \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \right|$$

ס"ח של הטור חסומה ולפי הגדרה זה אומר שהטור חסום.

(ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$ הוא מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ כאשר $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ סדרה מונוטונית

שואפת לאפס ו- $\{b_n\} = \{\cos(nx)\}$ סדרה כך ש- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור חסום (עפ"י

מה שהוכחנו בסעיף הקודם) לכן הטור מתכנס עפ"י מבחן דיריכלה.
מש"ל

שאלה 4

בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(3^n-1)}$.

פתרון

כאשר $\frac{3^n}{2^n(3^n-1)} = a_n b_n$ ו- $a_n = \frac{3^n}{3^n-1}$ ו- $b_n = \frac{1}{2^n}$ לכל n . הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ הוא טור

גיאומטרי מתכנס. נראה שהסדרה $\{a_n\}$ מונוטונית וחסומה ולכן עפ"י מבחן

אבל נקבל שהטור שלנו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(3^n-1)}$ מתכנס.

נשים לב ש- $a_n = \frac{3^n}{3^n-1} = \frac{3^n-1+1}{3^n-1} = 1 + \frac{1}{3^n-1}$ ומכאן קל לראות שהסדרה

מונוטונית. כמו כן מתקיים $\left|1 + \frac{1}{3^n-1}\right| = 1 + \frac{1}{3^n-1} < 1 + 1 = 2$ ולכן הסדרה

חסומה.

מש"ל

שאלה 5

הוכיחו ש- $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס אם"ם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס לכל סדרה חסומה b_n .

פתרון

\Leftrightarrow נניח שהטור מתכנס כלומר $\sum |a_n| < \infty$. תהי b_n סדרה חסומה כלשהי,

לכן קיים $k > 0$ כך ש $|b_n| \leq k$ ולכן $|a_n b_n| = |a_n| |b_n| \leq k |a_n|$ ולפי מבחן

ההשוואה הראשון הטור $\sum |a_n b_n|$ מתכנס. לכן גם הטור $\sum a_n b_n$ מתכנס.

\Rightarrow שימו לב, נתון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס **לכל** סדרה חסומה, ובפרט לכל

סדרה **חסומה** שנבחר. כעת, נגדיר את הסדרה b_n באופן הבא: בכל

האינדקסים בהם $a_n = 0$ נגדיר $b_n = 0$, ואחרת נגדיר $b_n = \frac{|a_n|}{a_n}$. כלומר:

$$b_n = \begin{cases} 0 & a_n = 0 \\ \frac{|a_n|}{a_n} & \text{otherwise} \end{cases} \text{ כעת,}$$

$$|b_n| = \begin{cases} 0 & a_n = 0 \\ \frac{|a_n|}{|a_n|} & \text{otherwise} \end{cases} = \begin{cases} 0 & a_n = 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

לכן סדרה חסומה

על ידי 1. לכן לפי הנתון $\sum a_n b_n < \infty$ אבל $\sum |a_n| = \sum a_n b_n$ כלומר $\sum a_n$ מתכנס בהחלט כפי שרצינו.

מש"ל

שאלה 6

בדקו את ההתכנסות וההתכנסות בהחלט של הטורים הבאים:

$$a. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n^2}}{(n!)^3}$$

נבדוק דבר ראשון התכנסות בהחלט, כלומר האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{(n!)^3}$

$$\text{מתכנס. נסתכל על } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{3^{(n+1)^2}}{((n+1)!)^3} \frac{(n!)^3}{3^{n^2}} = \frac{3^{2n+1}}{(n+1)^3}$$

נוכיח

באינדוקציה כי $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ לכל n . עבור $n=1$ ברור. נניח נכון עבור

n נוכיח עבור $n+1$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \right| &= \frac{3^{2(n+1)+1}}{((n+1)+1)^3} = \frac{3^2 3^{2n+1}}{(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1} \geq \\ &\geq \frac{3^2 3^{2n+1}}{(n+1)^3 + 3(n+1)^3 + 3(n+1)^3 + (n+1)^3} = \frac{9}{8} \frac{3^{2n+1}}{(n+1)^3} \geq \frac{3^{2n+1}}{(n+1)^3} > 1 \end{aligned}$$

(השלב האחרון לפי הנחת האינדוקציה).

לכן $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \neq 0$ מונוטונית עולה וגדולה ממש מאפס ולכן בהכרח

ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ולכן למעשה הטור מתבדר.

$$\text{b. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(n+\pi)}{n^{1.3}}$$

מתכנס ומכאן עפ"י מבחן $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.3}}$. הטור $\left| \frac{(-1)^{n+1} \cos(n+\pi)}{n^{1.3}} \right| < \frac{1}{n^{1.3}}$

השוואה ראשון $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \cos(n+\pi)}{n^{1.3}} \right|$ מתכנס. מכאן,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(n+\pi)}{n^{1.3}} \text{ מתכנס בהחלט.}$$

$$\text{c. } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

דבר ראשון נבדוק התכנסות בהחלט, כלומר את התכנסות הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right) \text{ . נסתכל על הסכומים החלקיים של טור זה:}$$

$$S_1 = \log\left(\frac{2}{1}\right) = \log 2 - \log 1 = \log 2$$

$$S_2 = \log 2 - \log 1 + \log 3 - \log 2 = \log 3 - \log 1 = \log 3$$

$$S_3 = \log 2 - \log 1 + \log 3 - \log 2 + \log 4 - \log 3 = \log 4$$

\vdots

$$S_n = \log(n+1)$$

לכן $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ ולכן הטור מתבדר, כלומר הטור המקורי אינו מתכנס בהחלט.

נמשך, קל לוודא ש $\frac{n+1}{n}$ מונוטונית יורדת ושואפת ל 1 ולכן

$\log\left(\frac{n+1}{n}\right)$ מונוטונית יורדת לאפס ולכן לפי משפט לייבניץ הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$$
 מתכנס בתנאי.

מש"ל

שאלה 7

בדקו את התכנסות הטור: $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots$

פתרון

נניח בשלילה שהטור מתכנס. לכן גם הטור עם סוגריים יתכנס. נוסיף סוגריים באופן הבא:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1}\right) + \dots = \frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \dots = \sum \frac{2}{n}$$

הטור הנ"ל מתבדר, בסתירה להנחה, ולכן גם הטור המקורי מתבדר.

מש"ל