מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 11

<u>בעיה 1</u>

יהי $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$.

יהי $\sim$ יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$ כך ש-

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$$
$$\Updownarrow$$
$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D^2 \vee (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

<u>הוכיחו:</u>

$\mathbb{R}^2/\sim$ הומאומורפי ל-$\mathbb{R}^2$.

<u>בעיה 2</u>

יהי $a \in \mathbb{R}$. יהי $\sim$ יחס שקילות על $\mathbb{R}$ כך ש-

$$x \sim y \Leftrightarrow \big((x \ge a) \wedge (y \ge a)\big) \vee \big((x < a) \wedge (y < a)\big)$$

<u>הוכיחו:</u>

$\mathbb{R}/\sim$ אינו הוסדורף.

<u>בעיה 3</u>

יהי $\sim$ יחס שקילות על מ"ט X .

<u>הוכיחו</u> שכל מחלקות השקילות פתוחות אם"ם $X/\sim$ מ"ט דיסקרטי

<u>בעיה 4</u>

<u>א'</u> נתון מ"ט דיסקרטי.

<u>הוכיחו</u> שהמרחב קומפקטי אם"ם הוא סופי.

<u>ב'</u> נתון מ"ט סופי והאוסדורף.

<u>הוכיחו</u> שהמרחב דיסקרטי

<u>בעיה 5</u>

. תהי $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ תת קבוצה כך ש- $\overline{A^c} = \mathbb{R}$.

<u>הוכיחו</u> שרכיבי הקשורות של תת מרחב A הם נקודונים.

<u>בעיה 6</u>

<u>א'</u> יהי X מ"ט ויהיו $A_1, \dots, A_n \subseteq X$ תת מרחבים קומפקטיים.

<u>הוכיחו</u> שגם $A_1 \cup \dots \cup A_n$ קומפקטי.

<u>ב'</u> יהי X מ"ט האוסדורף . יהיו $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ תת מרחבים קומפקטיים.

<u>הוכיחו</u> ש- $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ קומפקטי.