פתרון תרגיל 4

תרגיל 1

נתון ש $|A\setminus B|=|B\setminus A|$ ז"א קיימת פונקציה חח"ע ועל $f:A\setminus B\to B\setminus A$ נגדיר פונקציה

$g:A\to B$ ע"י $g(a)=\begin{cases} f(a) & a\notin B \\ a & a\in B\end{cases}$ נוכיח ש g חח"ע ועל.

חח"ע – יהי $a_1,a_2\in A$ כך ש $g(a_1)=g(a_2)$, מכיוון שלכל $a\in A$ $f(a)\notin A$ אז או ש $a_1,a_2\in B$ או ש $a_1,a_2\notin B$ (כי אם $a_1\in B\wedge a_2\notin B$ נקבל $f(a_2)=a_1$ וזה לא ייתכן).

אם $a_1,a_2\in B$ אז $a_1=a_2$ ואם $a_1,a_2\notin B$ אז $f(a_1)=f(a_2)$ ומכיוון ש f חח"ע נקבל $a_1=a_2$.

על- יהי $b\in B$ אם $b\in A$ אז $f(b)=b$ אם $b\notin A$ אז $b\in B\setminus A$ ומכיוון ש f על קיים $a\in A\setminus B$ כך ש $f(a)=b$ מכיוון ש $a\notin B$ נקבל $g(a)=f(a)=b$.

תרגיל 2

צ"ל שקיימת פונקציה $f:N\to B$ חח"ע ועל נגדיר את הפונקציה להיות $f(n)=n^2$.

חח"ע- יהי $n_1,n_2\in N$ כך ש $f(n_1)=f(n_2)$ ז"א ${n_1}^2={n_2}^2$.

מכיוון ש ${n_1}^2={n_2}^2\leftrightarrow {n_1}^2-{n_2}^2=0\leftrightarrow (n_1-n_2)(n_1+n_2)=0\leftrightarrow n_1=n_2\vee n_1=-n_2$

$n_1,n_2\in N$ לא ייתכן ש $n_1=-n_2$ ולכן $n_1=n_2$.

על- יהי $b\in B$ ז"א קיים $n\in N$ כך ש $b=n^2$ ולכן עבור $n\in N$ זה $f(n)=b$.

תרגיל 3

לא נכון דוגמא נגדית

נניח ש $B=\{1\},A=\{1\}$ נקבל ש $|A|=|B|$ אבל לא קיימת פונקציה f מ A ל B שאינה על.

תרגיל 4

נבנה פונקציה חח"ע $f:A\to Q$. לכל $a\neq b\in R$ יש אינסוף מספרים רציונלים ולכן לכל קטע (a,b) קיים מספר רציונאלי q כך ש $q\in(a,b)$. נגדיר את הפונקציה f להיות $f(a,b)=q$.

נוכיח ש f חח"ע- יהיו $(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in A$ כך ש $f(a_1,b_1)=f(a_2,b_2)$ ז"א $q_1=q_2$ באשר $q_1\in(a_1,b_1),q_2\in(a_2,b_2)$ ז"א $q_1\in(a_1,b_1)\cap(a_2,b_2)$ מהנתון נקבל שאם $(a_1,b_1)\neq(a_2,b_2)$ אז $(a_1,b_1)\cap(a_2,b_2)=\varnothing$ בסתירה לכך ש $q_1\in(a_1,b_1)\cap(a_2,b_2)$ ולכן $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$.

מההרצאה אנו יודעים ש Q בת מניה ואם קיימת פונקציה $f:A\to Q$ חח"ע אז A היא סופית או בת מניה.

תרגיל 6

א.

נניח בשלילה ש B קבוצה סופית אם $A=B$ אז גם A סופית בסתירה לנתון.

אם $A\subset B$ מכיוון ש B קבוצה סופית קיימים מספר סופי של איברים השייכים ל B ולא שייכים ל A נניח $\{x_1,x_2...,x_n\}$ ולכן $A=B\setminus\{x_1,x_2...,x_n\}$ קיבלנו שב A מספר סופי של איברים בסתירה לנתון.

ב.

מכיוון ש f חח"ע נקבל ש $f:A\to f[A]$ חח"ע ועל ולכן $|A|=|f(A)|$ ולכן ב $f[A]$ מספר אינסופי של איברים. בנוסף $f[A]\subseteq B$, ולכן, על פי סעיף א, בקבוצה B מספר אינסופי של איברים.

ג.

מכיוון שהקבוצה B היא לא ריקה קיים $b\in B$. נגדיר פונקציה $g: A\to A\times B$ ע"י לכל $a\in A$ $g(a)=(a,b)$.

נוכיח ש g חח"ע: יהיו $a_1,a_2\in A$ ונניח ש $g(a_1)=g(a_2)$ ז"א $(a_1,b)=(a_2,b)$ על פי הגדרת זוג סדור $a_1=a_2$.

מהסעיף הקודם נקבל שב $A\times B$ מספר אינסופי של איברים.

ד.

נסמן את קבוצת כל הפונקציות מ B ל A ב C נגדיר פונקציה $f: A\to C$ ע"י לכל $a\in A$ $f(a)=g$ באשר לכל $b\in B$ $g(b)=a$ נוכיח ש f חח"ע. יהיו $a_1,a_2\in A$ באשר $f(a_1)=f(a_2)$ ז"א הפונקציה g_1 המקיימת לכל $b\in B$ $g_1(b)=a_1$ שווה לפונקציה g_2 המקיימת לכל $b\in B$ $g_2(b)=a_2$ כעת $g_1=g_2$ אם ורק אם לכל $b\in B$ $g_1(b)=g_2(b)$ ז"א $a_1=a_2$.

ומסעיף ב נקבל שהקבוצה C היא אינסופית.

תרגיל 7

עוצמת כל הסדרות העולות של מספרים טבעיים היא עוצמת הרצף.

מההרצאה $|N^N|=|R|$.

נסמן ב A את קבוצת הסדרות העולות. ז"א $a\in A\leftrightarrow a=\{a_1,a_2,...|a_1<a_2<....\}$.

נגדיר פונקציה $f: A\to N^N$ ע"י לכל $a\in A$ $f(a)=g$ באשר $g(n)=a_n$.

f חח"ע- יהיו $a,b\in A$ כך ש $f(a)=f(b)$ ז"א לכל $n\in N$ $a_n=g_a(n)=g_b(n)=b_n$ ולכן $a=b$ ז"א $|A|\le|N^N|$.

נגדיר פונקציה $f: N^N\to A$ ע"י לכל $g\in N^N$ ז"א $g(n)=a_n$ $f(g)=a$ באשר $a=\{a_1,a_1+a_2+1,a_1+a_2+a_3+2,...\}$.

f חח"ע- יהיו $g_1,g_2\in N^N$ כך ש $f(g_1)=f(g_2)$ נניח בשלילה ש $g_1\ne g_2$ ז"א קיים $n\in N$ שעבורו $g_1(n)\ne g_2(n)$ ז"א האיבר ה n-י בסדרה שונה ולכן $f(g_1)\ne f(g_2)$ סתירה.

סה"כ קיבלנו ש $|A|\le|N^N|$ ו $|N^N|\le|A|$ ועל פי משפט קנטור ברנשטיין $|A|=|N^N|$.

תרגיל 8

למשל: קבוצת כל הפונקציות מקבוצת המספרים הממשיים לקבוצה $\{0,1\}$

תרגיל 9

א. לפי משפט קנטור-ברנשטיין עבור כל קבוצה A עוצמת A קטנה מעוצמה של קבוצת החזקה שלה , |A|<|P(A)|. יודעים כי כאשר |A| = k אזי 2^k=|P(A)| לכן עבור כל עוצמה k מתקיים k< 2^k.

ב. די דומה לסעיף א'.

תרגיל 10

ב. נוכיח ש- $(k^\lambda)^\mu=k^{\lambda\cdot\mu}$

יהו $|A|=k,|B|=\lambda,|C|=\mu$, צ"ל : $\{f: C\to\{g: B\to A\}\}\cong\{h: B\times C\to A\}$

כאשר כל 2 סוגריים זאת אוסף הפונק' מקבוצה לקבותה.כלומר צ"ל שהתאמה $f\to h$ כך ש- $h(b,c)=f(c)(b)$ היא חח"ע ועל.

חח"ע: $f_1 = f_2 \Rightarrow \forall b,c: h_1(b,c) = h_2(b,c) \Rightarrow f_1(c)(b) = f_2(c,b), \forall b,c$

על: תהי $h: B\times C \to A$ נגדיר $f(c)(b) = h(b)(c)$ אזי f תעבור ל-h תחת העתקה הנ"ל.לכן מקבלים $(k^\lambda)^\mu = k^{\lambda\cdot\mu}$.(צריך לזכור כי $|\{f: X\to Y\}| = |Y|^{|X|}$).

א. נוכיח כי $k^{\lambda+\mu} = k^\lambda \cdot k^\mu$. שוב יהו $|A|=k, |B|=\lambda, |C|=\mu$.

צ"ל כי $\{f: B\bigcup C\to A\} \cong \{g: B\to A\}\times\{h: C\to A\}$.

ברור כי $B\subseteq B\cup C, C\subseteq B\cup C$ לכן פונקציות מתוך $\{g: B\to A\}, \{h: C\to A\}$ הן פונקציות מצומצמות של הפונקציות מתוך $\{f: B\bigcup C\to A\}$ ולכן ההתאמה $\{f: B\bigcup C\to A\} \to \{g: B\to A\}\times\{h: C\to A\}$ היא חח"ע ועל.

תרגיל 11

א. יהו C,B,A שלושת הקבוצות כך ש-$\lambda = |A|, \kappa=|B|, \mu=|C|$ וללא הדבלת כלליות אפשר להניח כי B היא תת-קבוצה של A($B\subseteq A$) ואז, $\{f: C\to A\} \supseteq \{g: C\to B\}$ ולכן $|A|^{|C|} \supseteq |B|^{|C|} \Leftarrow \lambda^\mu \ge \kappa^\mu$ כאשר $\lambda \ge \kappa$.

ב.שימו לב כאשר C≠Ø העתקת צימצום $\{f: A\to C\}\to\{f|_A: B\to C\}$ היא על לכן $|C|^{|A|} \supseteq |C|^{|B|} \Leftarrow \lambda\ge\kappa, \mu^\lambda \ge \mu^\kappa$.

ג. ו-ד. $0 = |\varnothing| = |\{f: B\to\varnothing\}| = 0^{|B|} = 0^\kappa$ לכל B≠Ø ואילו לכל B(ובכלל זה המקרה B=Ø) מתקיים : $|B|^0 = |\{f: \varnothing\to B\}| = |\{\varnothing\}| = 1$ כלומר $\kappa^0 = 1$ אם כן ככל הנוגע לחשבון העוצמות : $0^0 = 1$.