חשבון אינפי מתקדם

תרגיל 7 – פתרון

.1

א. $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, כאשר $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

נבנה פונקצית לגרנג' :

$$L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

$$\begin{cases} L_x=2x+2x\lambda\cdot\frac{1}{a^2}=0 \\ L_y=2y+2y\lambda\cdot\frac{1}{b^2}=0 \\ L_z=2z+2z\lambda\cdot\frac{1}{c^2}=0 \\ L_\lambda=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right)=0 \\ y\left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right)=0 \\ z\left(1+\frac{\lambda}{c^2}\right)=0 \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$$

$\Leftarrow$ $\begin{cases} (\pm a,0,0) & for \quad \lambda=-a^2 \\ (0,\pm b,0) & for \quad \lambda=-b^2 \\ (0,0,\pm c) & for \quad \lambda=-c^2 \end{cases}$ נקודות חשודות לקיצון .

היות ו- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ קבוצה קומפקטית (סגורה וחסומה ב $\mathbb{R}^3$) אזי פונקציה רציפה $u(x,y,z)$ מקבלת בקבוצה זו מינימום ומקסימום , ולכן מספיק להשוות את הערכים בנקודות החשודות לקיצון :

$$u(\pm a,0,0)=a^2$$
$$u(0,\pm b,0)=b^2$$
$$u(0,0,\pm c)=c^2$$

בהנחה ש $a > b > c > 0$ נקבל $(\pm a, 0, 0)$ נקודת מקסימום ו- $(0, 0, \pm c)$ נקודת מינימום .

באופן דומה בודקים מקרים עם יחסים אחרים בין a, b, c .

ב. $u(x,y) = xy$, כאשר $x + y - 1 = 0$

נבנה פונקצית לגרנג' :

$$L(x,y,\lambda) = xy + \lambda(xy - 1)$$

$$\begin{cases} L_x = y + \lambda = 0 \\ L_y = x + \lambda = 0 \\ L_\lambda = x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

$\Leftarrow$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ נקודה חשודה לקיצון כאשר $\lambda = -\frac{1}{2}$

$$d^2L = L_{xx}dx^2 + 2L_{xy}dxdy + L_{yy}dy^2 = 2dxdy$$

נסמן $g(x,y) = x + y - 1$

אזי

$$dg = dx + dy = 0 \quad \Rightarrow \quad dx = -dy$$
$$\Rightarrow d^2L = -2dy^2 < 0$$

$\Leftarrow$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ נקודת מקסימום על תנאי .

ג. $u(x,y) = xy^2$, כאשר $x + 2y - 1 = 0$

נבנה פונקצית לגרנג' :

$$L(x,y,\lambda) = xy^2 + \lambda(x + 2y - 1)$$

$$\begin{cases} L_x = y^2 + \lambda = 0 \\ L_y = 2xy + \lambda = 0 \\ L_\lambda = x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$\Leftarrow$ $\begin{cases} (1,0) & for \quad \lambda = 0 \\ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) & for \quad \lambda = -\frac{1}{9} \end{cases}$ נקודות חשודות לקיצון .

$$d^2L = L_{xx}dx^2 + 2L_{xy}dxdy + L_{yy}dy^2 = 4ydxdy + 2xdy^2$$

- נבדוק את הנקודה $(1,0)$, כאשר $\lambda = 0$

$$d^2L\Big|_{\substack{(1,0) \\ \lambda=0}} = 2dy^2 > 0$$

$\Leftarrow$ $(1,0)$ נקודת מינימום על תנאי .

- נבדוק את הנקודה $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, כאשר $\lambda=-\frac{1}{9}$

$$d^2L\Big|_{\substack{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\\ \lambda=-\frac{1}{9}}}=\frac{4}{3}dxdy+\frac{2}{3}dy^2$$

גם ידוע ש $dg=0$ כאשר $g\left(x,y\right)=x+2y-1$

ולכו

$$dg=dx+2dy=0$$
$$\Rightarrow dx=-2dy$$

$$d^2L\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=-\frac{8}{3}dy^2+\frac{2}{3}dy^2=-2dy^2<0$$

$\Leftarrow$ $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ נקודת מקסימום על תנאי .

.2

א. $x^2+y^2\le 25$ $\qquad u\left(x,y\right)=5-3x-4y$

נבדוק האם יש לפונקציה $u\left(x,y\right)$ נקודות קיצון בתחום $x^2+y^2<25$

$$\left.\begin{aligned} u_x&=-3 \quad \neq 0\\ u_y&=-4 \quad \neq 0\end{aligned}\right\}$$

$\Leftarrow$ אין נקודות קיצון בתוך התחום .

$\Leftarrow$ נחפש נקודות קיצון על השפה של התחום

$$L\left(x,y,\lambda\right)=5-3x-4y+\lambda\left(x^2+y^2-25\right)$$

$$\begin{cases} L_x=-3+2x\lambda=0\\ L_y=-4+2y\lambda=0\\ L_\lambda=x^2+y^2-25=0\end{cases}$$

$\Leftarrow$ $\begin{cases}(3,4) & for \quad \lambda=\frac{1}{2}\\ (-3,-4) & for \quad \lambda=-\frac{1}{2}\\ (0,\pm 5) & for \quad \lambda=\pm\frac{2}{5}\\ (\pm 5,0) & for \quad \lambda=\pm\frac{3}{10}\end{cases}$ נקודות חשודות לקיצון .

הקבוצה $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^3 \quad : x^2+y^2\le 25\right\}$ קבוצה סגורה וחסומה ולכן פונקציה רציפה מקבלת בה מינימום ומקסימום , ולכן נותר להשוות את ערכי הפונקציה $u(x,y)$ בנקודות החשודות לקיצון .

$$u(3,4)=-20 \qquad u(0,-5)=25$$
$$u(-3,-4)=30 \qquad u(5,0)=-10$$
$$u(0,5)=-15 \qquad u(-5,0)=20$$

$\Leftarrow$ $(-3,-4)$ נקודת מקסימום בתחום הסגור.

$(3,4)$ נקודת מינימום בתחום הסגור.

ב. $x^2+y^2\le 1 \qquad u(x,y)=\sqrt{3}xy+x^2$

נבדוק האם יש לפונקציה $u(x,y)$ נקודות קיצון בתחום $x^2+y^2<1$

$$\left.\begin{array}{l} u_x=\sqrt{3}y+2x=0 \\ u_y=\sqrt{3}x=0 \end{array}\right\}$$

$\Leftarrow$ $(0,0)$ נקודה חשודה לקיצון ב $x^2+y^2<1$.

$\Leftarrow$ נחפש נקודות קיצון על השפה של התחום

$$L(x,y,\lambda)=\sqrt{3}xy+x^2+\lambda\left(x^2+y^2-1\right)$$

$$\begin{cases} L_x=\sqrt{3}y+2x+2x\lambda=0 \\ L_y=\sqrt{3}x+2y\lambda=0 \\ L_\lambda=x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

$\Leftarrow$ $\begin{cases} \left(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & for \quad \lambda=\frac{1}{2} \\ \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\pm\frac{1}{2}\right) & for \quad \lambda=-\frac{3}{2} \end{cases}$ נקודות חשודות לקיצון .

נשווה את הערכים של $u(x,y)$ בכל הנקודות החשודות :

$$u(0,0)=0 \qquad u\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$
$$u\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{2} \qquad u\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

$\Leftarrow$ $\left(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ נקודת מינימום בתחום .

$\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\pm\frac{1}{2}\right)$ נקודת מקסימום בתחום .

ט.ל.ח