אינפי II - הרצאה III

10.3.2013

בהמשך לשיעור קודם, נמשיך לאינטגרציה בחלקים.

<u>אינטגרציה בחלקים</u>:

תהיינה $u(x), v(x)$ שתי פונקציות גזירות בקטע x. חוק לייבניץ $(uv)' = u'v + v'u$ ולכן $uv' = (uv)' - u'v$ וזאת אומרת ש$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$. ואם נרשום פורמלית $du = u'(x)dx\ , dv = v'(x)dx$ נקבל $\int udv = uv - \int vdu$.

דוגמא 1: $\int x\, e^x$.

נגדיר $u(x) = x, v'(x) = e^x \to v(x) = e^x, u'(x) = 1$, ועפ"י אינטרגציה בחלקים:

נקבל $\int x\, e^x = uv - \int vdu = xe^x - e^x + C$.

דוגמא 2: $\int xlnx\ dx$.

נגדיר $v' = x, v = \frac{1}{2}x^2, dv = xdx, u = \ln(x)\ , u'(x) = \frac{1}{x}, du = \frac{1}{x}dx$. נציב הכל ונקבל שניתן לבטא את האינטגרל כך $\int xlnx\ dx = uv - \int vdu = \frac{1}{2}x^2lnx - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}x^2lnx - \frac{1}{4}x^2 + C$.

דוגמא 3: $\int lnx\ dx$.

נגדיר $u(x) = lnx, u'(x) = \frac{1}{x}, v(x) = x, v'(x) = 1$ ועפ"י הנוסחה נקבל $\int lnx\ dx = xlnx - x + C$.

דוגמא 4: $\int e^x \cos x\ \ dx$

נגדיר $u(x) = e^x, du = e^xdx\ , v(x) = sinx, dv = cosxdx$ ונציב הכל בנוסחה של איטגרציה בחלקים כדי לקבל את הביטוי הבא: $\int e^x \cos x\ \ dx = uv - \int vdu = e^xsinx - \int e^xsinx\ dx$.

אבל, באופן דומה $\int e^xsinx\ dx = -e^xcosx - \int e^x(-cosx)x\ dx$.

נציב זאת במקור ונקבל $\int e^xcosx\ dx = e^xsinx + e^xcosx - \int e^xcosx\ dx$

ועי"י העברת אגפים $2\int e^xcosx\ dx = e^xsinx + e^xcosx + c'$, ועל כן $\int e^xcosx\ dx = \frac{1}{2}e^x(sinx + cosx) + c$ כאשר $c = \frac{c'}{2}$.

דוגמא 5: $\int \frac{1}{x^3-x^2+4x-4}dx$

ראשית נפרק זאת לשברים, ע"י $A, B, C \in R$, $\frac{1}{x^3-x^2+4x-4} = \frac{1}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$.

נבצע מכנה משותף ונקבל $\frac{1}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{(A+B)x^2+(C-B)x+(4A-C)}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{Ax^2+4A+Bx^2-Bx+Cx-C}{(x-1)(x^2+4)}$ מתקבלת מערכת משוואת $\begin{cases} A+B=0 \\ -B+C=0 \\ 4A-C=1 \end{cases}$ לכן $A = \frac{1}{5}, B = -\frac{1}{5}, C = -\frac{1}{5}$. נחזור לחישוב האינטגרל $\int \frac{1}{x^3-x^2+4x-4}dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+4}dx$. כעת מתקבל $\int \frac{1}{x^3-x^2+4x-4}dx = \frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{5}\int \frac{x+1}{x^2+4}dx$.

נתמקד באינטגרל הימני, שהוא $\int \frac{x+1}{x^2+4}dx = \int \frac{x}{x^2+4}dx + \int \frac{1}{x^2+4}dx$. הצבה: $u = x^2+4, du = 2xdx, xdx = \frac{1}{2}du$ ולכן $\int \frac{x}{x^2+4}dx = \int \frac{x}{u}\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\ln u = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C$.

החלק השני של האינטגרל מזכיר לנו את פונקציית הארקטנגנס, $\int \frac{1}{x^2+4}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\frac{1}{4}x^2+1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx$

ושוב, בהצבה, נסמן $u = \frac{x}{2}, du = \frac{1}{2}dx$ ונקבל $\frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+1}2\,du = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$. ועכשיו אפשר לסיים,

להציב הכל ולקבל $\int \frac{1}{x^3-x^2+4x-4}dx = \frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{10}\ln(x^2+4) - \frac{1}{10}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$.

בהינתן פונקציה רציונאלית $\frac{P(x)}{Q(x)}$ כאשר *p(x),q(x)* פולינומים, רוצים לפרק את זה לשברים חלקיים. מחלקים פולינומים

ומקבלים $\frac{P(x)}{Q(x)} = P'(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$. כאשר *p'(x)* פולינום. מתקבל $degR < degQ$ ובלי הגבלת הכלליות $degP < degQ$.

נפרק את *Q(x)* לגורמים אי פריקים.

נניח שהפירוק הוא $(x-a_1)^{e_1}(x-a_2)^{e_2}\ldots(x-a_m)^{e_m}.\,(x^2-b_1x+c_1)^{f_1}\ldots(x_1-b_nx+c_n)^{f_n}$

ונסמן $\mathrm{R}_1(x)^{e_1}\ldots R_m(x)^{e_m}S_1(x)^{f_1}\ldots S_n(x)^{f_n}$. כאשר $degR_i = 1, degS_j = 2$.

<u>משפט</u>: אם $\frac{P(x)}{Q(x)}$ מתפרק כנ"ל אזי: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{1,1}}{R_1(x)} + \cdots \frac{A_{1,e_1}}{R_1(x)^{e_1}} + \cdots + \frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{S_1(x)} + \cdots + \frac{B_{n,f_n}x+C_{n,f_n}}{S_n(x)^{f_n}}$.

דוגמא: $\int \frac{1}{x^4+1}$ לא מתפרק כי אין לו שורשים ממשיים, ולכן הוא מכפלה של שתי פולינומים ריבועיים אי פריקים. ז"א שניתן

לבטא אותו כך $x^4+1 = (x^2+Dx+E)(x^2+Fx+G) = x^4+(D+F)x^3+(E+DF+G)x^2+(DG+EF)x+EG$.

ושוב קיבלנו מערכת משוואות, שהיא $\begin{cases} D+F=0 \\ E+DF+G=0 \\ DG+EF=0 \\ EG=1 \end{cases}$. צריך להבדיל בין מקרים שונים.

הפתרונות המתקבלים הם: $E=G=1, D=\sqrt{2}, F=-\sqrt{2}$.

וכעת נרשום $\frac{1}{x^4+1} = \frac{\mathrm{A}x+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1} = \frac{(\mathrm{A}x+B)(x^2-\sqrt{2}x+1)+(Cx+D)(x^2+\sqrt{2}x+1)}{x^4+1} =$

$\frac{(A+C)x^3+(B-\sqrt{2}A+\sqrt{2}C+D)x^2+(A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D)x+(B+D)}{x^4+1}$ ושוב נפתור מערכת משוואות. נמשיך עם הצבה וכו'..