

# תרגול 1-אפשרית

שדות, מרוכבים ומערכת משוואות

# פרטים חשובים:

❖ אושרית שטוסל

❖ מייל: [oshritvig@gmail.com](mailto:oshritvig@gmail.com)

❖ אתר הקורס: math wiki

❖ שיעורי בית יעלו לזא

❖ צריך להירשם עם חשבון gmail ללינארית 1 קיץ תש"פ.

❖ יהיה בוחן אמצע.

הוכחה (1) - נכונה

הוכחה (2) - נכונה

$a \in F, b \in F \rightarrow a+b \in F$  הוכחה (3)

$a \cdot b = b \cdot a, a+b = b+a \leftarrow a, b \in F$  הוכחה (4)

$a+0 = 0+a = a \forall a \in F$  הוכחה (5)

0F - נכונה

$1a = a \cdot 1 = a \forall a \in F$  הוכחה (6)

1F נכונה

$-a \in F \forall a \in F$  הוכחה (7)

$$-a + a = a + (-a) = 0 = e$$

$a^{-1} \in F \forall a \in F, a \neq 0$  הוכחה (8)

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1 = e$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad a, b, c \in F \text{ הוכחה (9)}$$

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad a, b, c \in F \text{ הוכחה (10)}$$



תרגיל: קבוצת 2-מרכיב של איזר ניטלי. איזר ניטלי, ומניחים שהם יחידים (ולו תוספת)

קבוצת 2-מרכיב של איזר ניטלי. איזר ניטלי (מא) - יחיד.

קבוצת 2-מרכיב של איזר ניטלי. איזר ניטלי (מא) - יחיד.

תוספת:

נניח כי יש 2 איברים ניטליים שניהם -  $O_1, O_2 \in F$  אינם מקיימים -

$$O_1 + O_2 = O_1 \quad \perp \quad -2 \text{ זכר}$$

ניטלי.

$$O_1 + O_2 = O_2$$

ניטלי.

-1 זכר

$$O_1 = O_2 \quad \Leftrightarrow \quad \text{ולק} - \text{יחיד.}$$

תוצאה: קבוצת 2-מרכיב של אזור ניטרי. לחזור ואזור ניטרי. אולם, ומניחים שהם יחידים (ולו תוספת)

תוצאה: כי  $\mathbb{C}$  הוא אזור הניטרי לחזור (מא-יחיד).

קבוצת האזור הניטרי אולם מא-יחיד.

תוצאה:

נניח כי יש 2 איברים ניטריים שניהם -  $O_1, O_2 \in F$  על  $\mathbb{C}$  ו-  $\mathbb{C}$ .

$$O_1 + O_2 = O_1 \quad \text{--- 2 } \mathbb{C}$$

$\perp$

אזור ניטרי.

$$O_1 + O_2 = O_2$$

$\perp$

אזור ניטרי.

$$\text{--- 1 } \mathbb{C}$$

$$O_1 = O_2 \quad \Leftrightarrow \quad \text{אין-יחיד.}$$

נניח כי יש 2 איברים ניטריים אולם,  $1_1, 1_2 \in F$  על  $\mathbb{C}$  ו-  $\mathbb{C}$ .

$$1_1 \cdot 1_2 = 1_1 \quad \text{--- 2 } \mathbb{C}$$

$\perp$

אזור ניטרי.

$$1_1 \cdot 1_2 = 1_2 \quad \text{--- 1 } \mathbb{C}$$

$\perp$

אזור ניטרי.

$$1_1 = 1_2 \quad \Leftrightarrow \quad \text{אין-יחיד.}$$



תכונת הנגדי לחיבור: איבר שאם מחברת אותו לאיבר אקבל תוצאה 0

תכונה 1:

יש איבר נגדי לכל איבר  $a \in F$ .

דוגמה:

יהי  $a \in F$  נניח כי  $b, c \in F$  הם איברים נגדיים של  $a$ .

$$b+a=0 \quad (1) \quad \text{ולפי (1) } b = -a$$

$$a+c=0 \quad (2) \quad \text{ולפי (2) } c = -a$$

$$\underbrace{(b+a)}_0 + c = b + \underbrace{(a+c)}_0$$

$$\Downarrow \\ b = c$$

ולפי (1) ו-(2)

כלומר תכונה 1 מתקיימת.



הוכחה:

$$\forall a \in F: (-1) \cdot a = -a$$

יהי שדה  $F$  תוכיחו כי הטענה הנכונה

תוכחה:

יש להוכיח כי  $-a$  (הוא) הנשדק ל  $a$ , אפי' אנו קודם האין כי  $a$  יש נשדק  $1$ .

אם-כך נהיה שחזרנו לתוכיח מה שיש  $(-1) \cdot a$  (הוא) נשדק ל  $a$

$$0 = 0 \cdot a = (1 + (-1)) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = a + (-1) \cdot a$$

↓  
האנו קודם

↓  
אפי' נשדק ל  $1$   
(4)

↓  
שואל  
(7)

$(-1) \cdot a$  - נשדק ל  $a$  ←  
הוא

הוכחה:

אנו נשדק ל  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$  ויש להוכיח.

הוכחה:

$$\forall a \in F: (-1) \cdot a = -a$$

יהי שדה  $F$  תוכיחו כי הטענה הנכונה

תוכחה:

נשקף כי  $-a$  תהא הנשד. של  $a$ . לפי הגדרת קודם האין כי  $a - 1$  של  $a$  נשד. נ"ח.

לפי-כך צדק מה שחוצר לתוכיח ע"ש  $(-1) \cdot a$  תהא נשד. של  $a$

$$0 = 0 \cdot a = (1 + (-1)) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = a + (-1) \cdot a$$

↓  
האין כהוצאה

↓  
אפי' הע' (הנשד. של 1)  
(4)

↓  
שואח  
(7)

←  $(-1) \cdot a$  קר-נשד. של  $a$   
היא

הוכחה:

להכיל ש-  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$  לכל שדה.

הוכחה: מוכיח להכיל שכל מקי"ם  $n$  כל 1 האקסיומ.

כל אי-ר נטל. להכיל.

כי לכל  $k \in N$  מקי"ם  $n+k > n$  ואילו-אי-ר נטל. צ"ק לקי"ם  $n+0 = n$

מכונות:

הכנה: כל נשנה  $a - b$  (כל המכונות) ופגלה המאה -

האם קב המכונות אישור שדה?  
 $(a+bi) \cdot (c+di) = ac + bdi$



תרגיל - קטלן (מצדוק שאלה קטלן)

הצגה (א)  $a+bi \rightarrow z$   $z = \frac{5+2i}{2-3i}$

Re(z) (2)

Im(z) (3)

|z| (4)

$\bar{z}$  (5)

הצגה (ב)  $a+bi$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

כפל במרוכבים

פתרון:

נתון:  $z = 2 - 3i$  (נתון)

$$\frac{5+2i}{2-3i} \cdot \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{10+15i+4i+6i^2}{2^2+3^2} =$$

$$= \frac{4+19i}{13} = \frac{4}{13} + \frac{19}{13}i$$

$$z = \frac{4}{13} + \frac{19}{13}i \quad (1)$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{4}{13} \quad (2)$$

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{19}{13} \quad (3)$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{4}{13}\right)^2 + \left(\frac{19}{13}\right)^2} = \frac{\sqrt{377}}{13} \quad (4)$$

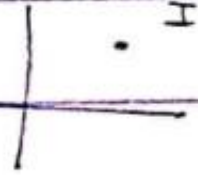
$$\bar{z} = \frac{4}{13} - \frac{19}{13}i \quad (5)$$

6. צבירה: כליו למשך אל הכיוון של (אנטיגון).

$$R = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{377}}{13}$$

שטח  $78.11^\circ$

$$\tan(\theta) = \frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)} = \frac{\frac{19}{13}}{\frac{4}{13}} = \frac{19}{4} \Rightarrow \theta = \boxed{1.36} \text{ (רדיאן)}$$



שטח  $78.11^\circ$

מערכת משוואות ליניאריות

מערכת משוואות ליניאריות עם n משתנים ו-m משוואות

$$\begin{cases}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
 \vdots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m
 \end{cases}$$

צורת מטריצה - מציגים את המערכת בצורה של מטריצה

$$\left( \begin{array}{cccc|c}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
 a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
 a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m
 \end{array} \right)$$

קו המעלה  
 מן השורה הראשונה  
 עד השורה האחרונה  
 מכיל את המשתנים



הצגת המערכת בצורת מטריצה מוגדלת

$$\begin{cases} \text{I} & x + 3y = 5 \\ \text{II} & y - z = 2 \\ \text{III} & x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

הצגת המערכת בצורת מטריצה מוגדלת

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

נסחו  $\forall$  - יש 3 פעולות שבהן לא הסתייגו ולא ישו את הפתרון המשוער.

1) החלפה שורה הסתייגה - שקול להחלפה סדר המשוער דבור שלא שנה את הפתרון.

$$R_i - R_j \text{ שורה } i \text{ הסתייגה}$$

אם-אז נרצה להחליף שורה 1, 2 נסמן  $R_1 \leftrightarrow R_2$

2) הכפלה שורה בקבוע שונה מ-0 - שקול להכפלה של 1 המשוער בקבוע שונה מ-0, לא משנה את הפתרון.

$$R_i = a \cdot R_i \quad a \in F \text{ דבור}$$

3) חיבור שורה אחת לפי קבוע הסתייגה לשורה שנייה - שקול לחיבור 2 אגפי משוואה אחת לפי קבוע

2-אגפי משוואה שנייה.

$$R_i = R_i + a R_j \quad \text{נסמן}$$

צירוף ז'אליט

דף - ציור מוקף/פניה/ציר - הציור הכאן קטורה של שינוי 0-1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ציור מוקף

דוגמא:

כ) צורה מצוינת - מטריצה איננה לכל איזר מודול שלה יש אינפיניט קלר

ב) אז יש שווה - אינפיניט קלר - הן - הן בסוף

ג) כל איזר מודול נמצא זמין לאיזר הנמוך הקובעים

\* - איזר מודול

אנטי-צורה מצוינת

$$A = \begin{pmatrix} * & ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & * & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & * & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

צורה:

קראו - הן מצוינת

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

מדורגת

לא מדורגת

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

מדורגת

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

תרגיל:



בהצלחה!!!

