

פתרון תרגיל בית 3 בשדות ותורת גלואה 88-311 סמסטר א' תש"ף

שאלה 1 (חימום). תהי K/F הרחבת שדות מממד ראשוני. יהי $F \subseteq L \subseteq K$ שדה ביניים. הוכיחו $L = K$ או $L = F$.

פתרון. לפי כפליות הממד

$$[K : F] = [K : L][L : F]$$

עבור $[K : F]$ ראשוני. לכן $[L : F] = 1$ או $[K : L] = 1$. כלומר $L = F$ או $L = K$, בהתאמה.

שאלה 2. תהי K/F הרחבת שדות. הוכיחו (למשל באינדוקציה) שלכל $a_1, \dots, a_n \in K$ מתקיים

$$[F[a_1, \dots, a_n] : F] \leq \prod_{i=1}^n [F[a_i] : F]$$

פתרון. ראינו שאם $F \subseteq L \subseteq K$ ו- $a \in K$, אז $[L[a] : L] \leq [F[a] : F]$. הרי הפולינום המינימלי של a מעל L מחלק (מעל L) את הפולינום המינימלי של a מעל F . בפרט, אם $L = F[a_1]$ ונספח את a_2 אז

$$[F[a_1, a_2] : F[a_1]] \leq [F[a_2] : F]$$

מכפליות הממד נקבל

$$[F[a_1, a_2] : F] = [F[a_1, a_2] : F[a_1]][F[a_1] : F] \leq [F[a_1] : F][F[a_2] : F]$$

כעת אפשר לעשות אינדוקציה:

$$\begin{aligned} [F[a_1, \dots, a_n] : F] &= [F[a_1, \dots, a_n] : F[a_1, \dots, a_{n-1}]] [F[a_1, \dots, a_{n-1}] : F] \\ &\leq [F[a_n] : F] \prod_{i=1}^{n-1} [F[a_i] : F] = \prod_{i=1}^n [F[a_i] : F] \end{aligned}$$

שאלה 3. מצאו את הפולינום המינימלי של האיברים הבאים מעל השדה המצויין:

א. $\sqrt[3]{5}$ מעל \mathbb{Q} .

ב. $\sqrt{2}$ מעל $\mathbb{Q}[i]$.

ג. $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ מעל \mathbb{Q} .

ד. $i + \sqrt{2}$ מעל \mathbb{Q} .

פתרון.

א. קל לראות ש- $\sqrt[3]{5}$ מאפס את הפולינום $x^3 - 5$, שהוא אי פריק מעל \mathbb{Q} לפי קריטריון אייזנשטיין עבור 5.

ב. $x^2 - 2$ מתאפס ב- $\sqrt{2}$. הפולינום המינימלי לא יכול להיות לינארי כי $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}[i]$ (כי אם $\sqrt{2} = a + bi$ אז $bi = \sqrt{2} - a$ הוא ממשי מה שמכריח $b = 0$. אבל אז $\sqrt{2} = a \in \mathbb{Q}$ שזו סתירה). לכן $x^2 - 2$ הוא הפולינום המינימלי.

ג. נסמן $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ ונחשב

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= 2 + \sqrt{2} \\ (\alpha^2 - 2)^2 &= 2 \\ \alpha^4 - 4\alpha^2 + 2 &= 0\end{aligned}$$

ולכן α מאפס את $x^4 - 4x^2 + 2$ שהוא אי פריק לפי אייזנשטיין ולכן זהו הפולינום המינימלי.

ד. נסמן $\alpha = i + \sqrt{2}$ ונחשב

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= 1 + 2\sqrt{2}i \\ \frac{(\alpha^2 - 1)^2}{4} &= -2 \\ \alpha^4 - 2\alpha^2 + 9 &= 0\end{aligned}$$

לכן $x^4 - 2x^2 + 9$ הוא פולינום מעל \mathbb{Q} שמתאפס ב- α . ניתן להראות ש- $\mathbb{Q}[i + \sqrt{2}]$ מדרגה 4, אז בהכרח הפולינום שמצאנו הוא הפולינום המינימלי. מפני שהפולינום המינימלי צריך להיות $[\mathbb{Q}[i, \sqrt{2}]: \mathbb{Q}] = 4$.

שאלה 4. תהי K/F הרחבת שדות, ויהי $\alpha \in K$ עם פולינום מינימלי

$$m_\alpha(x) = x^n - c \in F[x]$$

עבור $k \in \mathbb{N}$ מצאו את $m_{\alpha^k}(x)$, הפולינום המינימלי של α^k . הדרכה:

א. הניחו $k|n$ ומצאו פולינום שמתאפס ב- α^k .

ב. למקרה הכללי סמנו $d = (n, k)$ ומצאו קודם את $m_{\alpha^d}(x)$.

פתרון.

א. לפי הנתון קיים q כך ש- $n = kq$. אנחנו יודעים כי

$$0 = \alpha^n - c = (\alpha^k)^q - c$$

ולכן $x^q - c$ הוא פולינום שמתאפס ב- α^k . נניח כי

$$m_{\alpha^q}(x) = x^t + \sum_{i=0}^{t-1} a_i x^i$$

הוא הפולינום המינימלי של α^k וממעלה t . למעשה הראנו $t \leq q$. לפי הגדרה $\alpha^{kt} + \sum_{i=0}^{t-1} a_i \alpha^{ki} = 0$ וקיבלנו ש- α הוא שורש של פולינום מדרגה kt . אז בהכרח $n \leq kt$. כלומר $\frac{n}{k} = q \leq t \leq q$, ולכן $t = q$. לכן $m_{\alpha^k}(x) = x^q - c$ הוא ממעלה מינימלית.

ב. קיימים $s, t \in \mathbb{Z}$ כך ש- $d = sn + tk$. לפי הגדרה $d|k$ ולכן $F(\alpha^k) \subseteq F(\alpha^d)$. נרצה להראות הכלה בכיוון השני, ואז להשתמש בסעיף הקודם. נשים לב כי

$$\alpha^d = \alpha^{sn+tk} = (\alpha^n)^s (\alpha^k)^t = c^s (\alpha^k)^t \in F(\alpha^k)$$

ולכן $F(\alpha^k) = F(\alpha^d)$. בעזרת הסעיף הקודם נסיק

$$[F(\alpha^k) : F] = [F(\alpha^d) : F] = \frac{n}{q}$$

וכי $m_{\alpha^d}(x) = x^{n/d} - c$. מפני ש- $c^{k/d} = (\alpha^n)^{k/d} = (\alpha^k)^{n/d}$, נקבל כי $m_{\alpha^k}(x) = x^{n/d} - c^{k/d}$ הוא פולינום שמתאפס ב- α^k עם דרגה השווה לממד ההרחבה, ולכן הוא הפולינום המינימלי.

בהצלחה!