# הסתברות וסטטיסטיקה מתמטית - תרגול 3

## חוק ה-1-0 של קולמוגורוב

$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots \subseteq \mathcal{F}$ σ-אלגברות בלתי-תלויות. אז לכל $A \in T = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$

מתקיים $P(A) \in \{0,1\}$.

עבור משתנים מקריים:

$Y, X_1, X_2, \ldots$ מ"מ ב"ת, $Y$ הוא $T = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$-מדיד, אז $Y$ קבוע כ"ת.

**הוכחה:**

לכל $c \in \mathbb{R}$, $\{Y \le c\} \in T$, לפי חוק 0-1 של קולמוגורוב למאורעות,

$$f(c) = P(Y \le c) \in \{0,1\}$$

נגדיר $c_0 = \sup\{c \in \mathbb{R} \mid f(c) = 0\}$.

$$P(Y \le c_0) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{Y \le c_0 + \tfrac{1}{n}\}\right) = \lim_{n\to\infty} P(Y \le c_0 + \tfrac{1}{n}) = 1$$

$$P(Y < c_0) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{Y < c_0 - \tfrac{1}{n}\}\right) = \lim_{n\to\infty} P(Y < c_0 - \tfrac{1}{n}) = 0$$

ולכן $P(Y = c_0) = 1$.

$\square$

**דוגמה:**

$\sum_{n=0}^{\infty} X_n(\omega) z^n$ טור חזקות אקראי: ראינו בהרצאה: רדיוס ההתכנסות שלו

קבוע כ"ת.

$$R(\omega) = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|X_n(\omega)|}}$$

## תרגיל:

אם $X_0, X_1, \dots$ ממבתש"ה, $\mathbb{E}[|X_n|]<\infty$, $X_n \neq 0$ אז $R(\omega) \underset{a.s.}{=} 1$.

## הוכחה:

אם $|z|<1$, נראה שהטור $\sum_{n=0}^{\infty} X_n(\omega) z^n$ מתכנס בהחלט,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} |X_n(\omega)|\cdot|z^n|\right] = \mathbb{E}[|X_0|]\cdot \sum_{n=0}^{N} |z|^n \le \mathbb{E}[|X_0|]\cdot\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n$$

הסדרה $\sum_{n=0}^{N} |X_n(\omega)||z^n|$ מתכנסת מונוטונית ל-$\sum_{n=0}^{\infty} |X_n(\omega)||z^n|$, לכן לפי משפט ההתכנסות המונוטונית $\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} |X_n(\omega)||z^n|\right]<\infty$.

בפרט $P\left(\sum_{n=0}^{\infty} |X_n(\omega) z^n|<\infty\right)=1$.

כעת נניח $r=|z|>1$ ונראה שהטור מתבדר כ.ת. נניח בשלילה שהוא מתכנס בסיכוי חיובי. לפי חוק 0-1 של קולמוגורוב, הטור יתכנס כ.ת.

$$P\left(\sum_{n=0}^{\infty} X_n(\omega) z^n<\infty\right)=1$$

$$\Downarrow$$

$$X_n(\omega) z^n \xrightarrow{a.s.} 0 \Rightarrow |X_n(\omega)| r^n \xrightarrow{a.s.} 0$$

## תזכורת:

$X_1, X_2, \dots$ סדרת מ"מ.

$X_n \to X$ כמעט תמיד, $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ אם $P\left(X_n(\omega)\xrightarrow[n\to\infty]{} X(\omega)\right)=1$.

$\Downarrow$

$X_n \to X$ בהסתברות, $X_n \xrightarrow{P} X$ אם לכל $\varepsilon>0$, $P(|X_n-X|\ge\varepsilon)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$\Downarrow$

$X_n \to X$ בהתפלגות, $X_n \xrightarrow{d} X$ אם בכל נקודת רציפות $t$ של $F_X$,

$$F_{X_n}(t)\to F_X(t)$$

$$|X_n(\omega)| r^n \xrightarrow{a.s.} 0 \quad \Leftarrow \quad |X_n(\omega) r^n| \xrightarrow{P} 0 \Leftarrow \text{לכל } \varepsilon>0,$$

$$P\left(|X_0(\omega)| \geq \frac{\varepsilon}{r^n}\right) = P(|X_n(\omega) r^n| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Downarrow$$

$$P(|X_0(\omega)|>0) = 0$$

מסתירה לכך ש- $X_0 \neq 0$.

הראינו שהטור מתכנס לכל $|z|<1$ ומתבדר לכל $|z|>1$, לכן $R(\omega)=1$ כנ"ל.

$\square$

---

## תוחלת ושונות

**הגדרה:**

יהי $X$ מ"מ. התוחלת של היא $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X \, dP$.

השונות של $X$ היא $Var(X) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]$.

**תרגיל:**

אם $X$ מ"מ עם $P(X>0)=1$, $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty P(X>t)\,dt$.

בפרט, אם $X$ בדיד ומקבל ערכים טבעיים, $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^\infty P(X\geq n)$.

**הוכחה:**

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\,dP(\omega) = \int_{-\infty}^\infty t\,dF_X(t) = \int_0^\infty t\,dF_X(t) = \int_0^\infty \left(\int_0^t ds\right) dF_X(t) =$$

$$\underset{\text{פוביני-טונלי}}{=} \int_{\{(t,s) \mid 0\leq s\leq t\}} dF_X(t)\,ds = \int_0^\infty \left(\int_s^\infty dF_X(t)\right) ds = \int_0^\infty P(X>s)\,ds$$

$\square$

**הערה:**

אם $F_X$ גזיר, $\int g(t)\,dF_X(t) = \int g(t)\,F_X'(t)\,dt$

**תרגיל:**

לכל $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מדידה בורל, ולכל מ"מ $X$ $\mathbb{E}[f(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dF_X(t)$.

**הוכחה:**

נוכיח בשלבים:

א. אם $f = a\cdot\mathbb{1}_A$ $\Leftarrow$

$$\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[a\cdot\mathbb{1}_A(X(\omega))] = a\cdot\Pr(X\in A) = a\cdot\int_A dF_X(t) = \int_\Omega a\cdot\mathbb{1}_A(t)\,dF_X(t)$$

ב. אם $f = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\mathbb{1}_{A_i}$ פונקציה פשוטה - זה נובע מלינאריות.

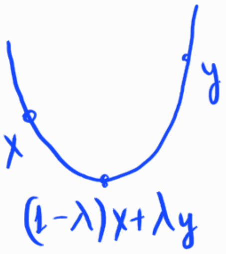
ג. אם $f\geq 0$ מדידה - אפשר לקרב אותה ע"י סדרה עולה של פונקציות פשוטות ואז הטענה נובעת ממשפט ההתכנסות המונוטונית.

ד. אם $f$ מדידה - $f = f^+ - f^-$, $f^+ = \max\{f,0\}$
$f^- = \max\{-f,0\}$

ואז הטענה נובעת מסעיף ג' + לינאריות. $\square$

**משפט:** (אי-שוויון ינסן)

אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ קמורה ו- $X$ מ"מ, $f(\mathbb{E}[X])\leq\mathbb{E}[f(X)]$.




**הגדרה:**

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ קמורה (convex) אם לכל $x,y\in\mathbb{R}$ ולכל $0\le\lambda\le1$,

$$f((1-\lambda)x+\lambda y)\le(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$$

$f(x)=x^2,\ e^x$ פונקציות קמורות

---

## הקדמה לריכוז מידה

**מטרה:** להבין בכמה $X$ יותר רחוק מהתוחלת שלו.

**אי-שוויון מרקוב:** אם $X\ge0$,

$$P(X\ge a)\le\frac{\mathbb{E}[X]}{a}$$

**הוכחה:**

$$\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}\Big[\underbrace{X}_{\ge a}\cdot\mathbb{1}_{\{X\ge a\}}+\underbrace{X\cdot\mathbb{1}_{\{X<a\}}}_{\ge0\ \text{כי}\ X\ge0}\Big]\ge a\cdot\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X\ge a\}}]=a\cdot P(X\ge a)$$

□

**אי-שוויון צ'בישב:** לכל מ"מ $X$ עם שונות סופית,

$$P(|X-\mathbb{E}[X]|\ge a)=P((X-\mathbb{E}[X])^2\ge a^2)\underset{\text{מרקוב}}{\le}\frac{\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]}{a^2}=\frac{Var(X)}{a^2}$$

**:דוגמה**

יהי $X \sim Bin(n,p)$. $p < \alpha < 1$.

$$P(X \geq \alpha n) \underset{\text{מרקוב}}{\leq} \frac{\mathbb{E}[X]}{\alpha n} = \frac{pn}{\alpha n} = \frac{p}{\alpha}$$

$$P(X \geq \alpha n) = P(X - pn \geq (\alpha - p)n) \leq P(|X - pn| \geq (\alpha - p)n) \underset{\text{צ'בישב}}{\leq} \frac{Var(X)}{(\alpha-p)^2 n^2} =$$

$$= \frac{\cancel{n}p(1-p)}{(\alpha-p)^2 n^{\cancel{2}}} = \frac{p(1-p)}{(\alpha-p)^2 n}$$