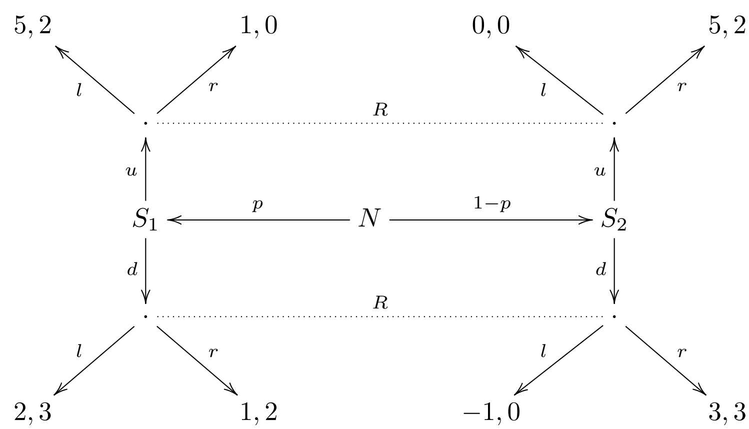
מקליד: עידן אריה
מרצה: פרופ' שרית קראוס
תאריך: 2016-06-16

נושאים מתקדמים בבינה מלאכותית
89-950-01

Signaling Games - המשך

הסתכלנו על הדוגמה בה הטבע מגריל מספר, בהסתברות p הוא נותן לשחקן 1 טיפוס S_1 ובהסתברות $1-p$ טיפוס S_2. שחקן 1 יכול לעשות up או down, ושחקן 2 יכול לעשות בתגובה left או right:



בשביל לחפש שיווי משקל צריך להסתכל על כל הקומבינציות האפשריות. נסתכל בהתחלה על separating equilibrium - כלומר כאלה בהם טיפוסים שונים בוחרים פעולות שונות:

- שיווי משקל ראשון - $[S_1 : u, S_2 : d]$(כלומר אם השחקן הראשון S_1 הוא בוחר up ואם S_2 הוא בוחר down). מה השחקן השני יעשה? צריך להבין מה האמונה שלו - מה הוא חושב על הטיפוס של השחקן הראשון לפי הפעולה שהשחקן הראשון ביצע. אם השחקן השני ראה up הוא יודע שהשחקן הראשון הוא S_1 בהסתברות 1, כי זה שיווי המשקל[1], ואם הוא רואה down הוא יודע שההסתברות היא 0(כי בהסתברות 1 השחקן הראשון בS_2):

$$\mu_u\left(S_1\right) = 1 \qquad \mu_d\left(S_1\right) = 0$$

לכן האסטרטגיה של השחקן השני תהיה $[u : l, d : r]$(כלומר אם יראה u יעשה l ואם יראה d יעשה r). בשיווי המשקל הזה לאף אחד השחקנים לא שווה לסטות:

  – אם השחקן הראשון יעשה d עבור S_1, השחקן השני יעשה r[2] והשחקן הראשון יקבל 1 במקום 5.
  – אם השחקן הראשון יעשה u עבור S_2, השחקן השני יעשה l, והשחקן הראשון יקבל 1- במקום 5.

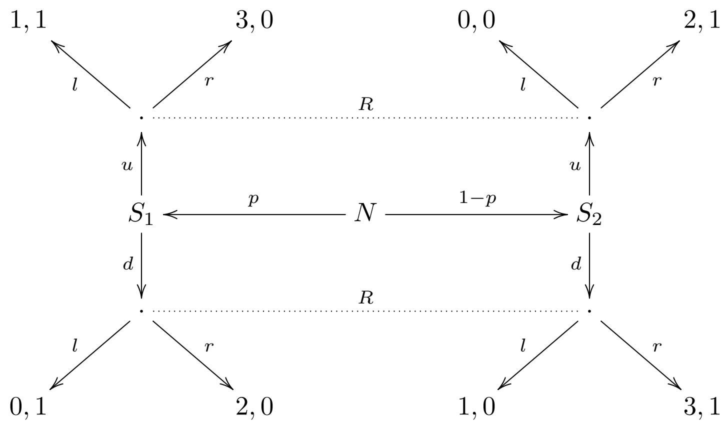
  גם לשחקן השני לא שווה לסטות, ולכן זהו שיווי משקל.

- יש שיוווי משקל אחר שמתחיל מ$[S_1 : d, S_2 : u]$.

[1] בפועל לא בהכרח השחקן השני יודע שזה שיווי המשקל - פשוט בשלב הזה אנחנו חוקרים את המצב הזה עד הסוף כדי להבין מה שיווי המשקל.

[2] כשבודקים אם לשחקן שווה לסטות, מניחים שהשחקנים האחרים נצמדים לאסטרטגיות משיווי המשקל.

לא תמיד זה כזה פשוט. נסתכל על משחק דומה:



- כאשר $p > \frac{1}{2}$, $[u : l, d : l], [S_1 : u, S_2 : u]$ אינו שיווי משקל טוב.
- כאשר $[S_1 : u, S_2 : u]$, כאשר $p < \frac{1}{2}$, $\mu_u(S_1) = p$ לשחקן השני כדאי לעשות $[u : r, d : l]$. האם כדאי לסטות?

  $\mu_u(S_1) = p$, לפי חוק בייס, אבל מכיוון שהשחקן הראשון בוחר d בהסתברות 0 לא ניתן לחשב לפי חוק בייס את $\mu(d) := \mu_d(S_1)$. מתי לשחקן השני לא כדאי לסטות? כאשר:

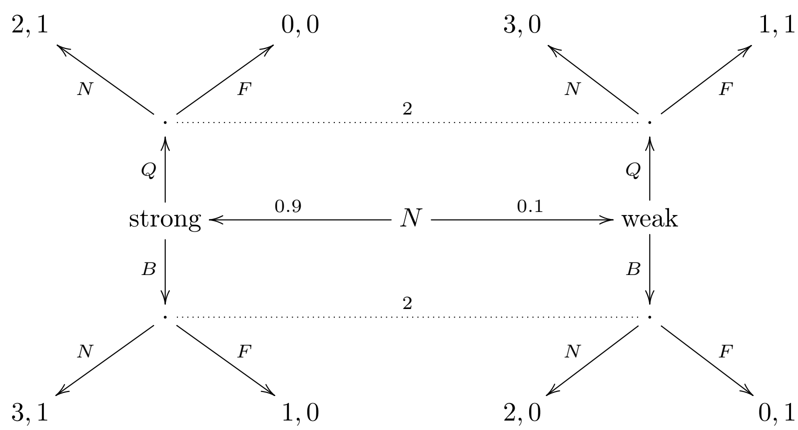
$$\mu(d) \cdot 1 + (1 - \mu(d)) \cdot 0 \geq \mu(d) \cdot 0 + (1 - \mu(d)) \cdot 1$$

$$\mu(d) \geq 1 - \mu(d)$$

$$\mu(d) \geq \frac{1}{2}$$

  נבחר $\mu(d)$ שרירותי כדי שזה יתקיים - למשל $\mu(d) = \frac{3}{4}$ - ואז זה יהיה שיווי משקל.

נסתכל על עוד משחק: ילד קם בבוקר, ויכול להחליט אם לשתות בירה או לאכול קיש. יש בשכונה שלו bully שאוהב להילחם(אבל לא להפסיד). הטבע מחליט בהסתברות 0.9 שהילד חזק. הבריון יעדיף לא להילחם בילד חלש. ילד חזק מעדיף בירה, וילד חלש מעדיף קיש.



האסטרטגיה הדומיננטית של ילד חזק היא לשתות בירה. מהם שיוויי המשקל?

- לילד החדש כל אפשרות שבו הוא לא נלחם עדיפה על כל אפשרות בה הוא נלחם - לא משנה מה הוא אוכל בשתי האפשרויות. לכן נסתכל על אסטרטגיה בה הוא בוחר לשתות בירה בשני המצבים: $[S:B,W:B]$.
מה כדאי לבריון לעשות?

$$\mathrm{EU}\left(F\right)=0.9\cdot0+0.1\cdot1=0.1$$

$$\mathrm{EU}\left(N\right)=0.9\cdot1+0.1\cdot0=0.9$$

ולכן אם הבריון רואה B עדיף לא לא להילחם. אבל מה כדאי לו לעשות אם הוא רואה Q? אם האסטרטגיה של הבריון תהיה $[B:N,Q:N]$ אז לילד חלש כדאי לסטות, ולכן זה לא שיווי משקל. לכן האסטרטגיה של הבריון צריכה להיות $[B:N,Q:W]$. מה צריכה להיות האמונה שלו בשביל זה? היא לא יכולה להיות 0.9, כי אז זה יהיה כמו כשהילד שותה בירה ויהיה כדאי לו לעשות N.

$$\mathrm{EU}\left(N|Q\right)=\mu\cdot1+\left(1-\mu\right)\cdot0\leq\mu\cdot0+\left(1-\mu\right)\cdot1=\mathrm{EU}\left(F|Q\right)$$

$$\mu\leq\frac{1}{2}$$

למשל $\mu=0$ זו דוגמה טובה.[3]

[3] אנחנו לא יכולים להשתמש בחוק בייס, ולכן מותר לנו לקבוע איזה ערך שאנחנו רוצים. אם הילד אכל קיש הבריון יכול להיות די בטוח שהוא לא חזק, כי ילד חזק תמיד ישתה בירה.

קואליציות Coalitions

הגדרה: משחק קואליציה הוא (N, v) כך ש:

N קבוצה סופית של שחקנים עם אינדקס i

v פונקציה $v : 2^N \to \mathbb{R}$ שמשייכת לכל קואליציה $S \subseteq N$ תמורה ממשית $v(S)$ שחברי הקואליציה יכולים לחלק ביניהם. מניחים ש$v(\emptyset) = 0$.

בעוד שבמשחקים אסטרטגים שהיו לנו עד היום שאלנו מה הפעולות שכל שחקן יעשה, כאש השאלות הן:

1. מה הקואליציה שתיווצר?
2. איך חברי הקואליציה יחלקו את התמורה?

נסתכל על סוג מסויים של משחקי קואליציה שנקראים superadditive games - כאלו בהן התחברות למישהו לא מפריעה, ומקבלים לפחות אותו utility שמקבלים בלעדיו. כלומר לכל $S, T \subset N$, אם $S \cap T = \emptyset$ אז $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$.

יש עוד סוג מעניין - convex game - בו דורשים שלכל $S, T \subseteq N$ מתקיים $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) - v(S \cap T)$.

איך נסמן את חלוקת הרווחים של הקואליציה?

נגדיר $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{2^{|N|}} \to \mathbb{R}^{|N|}$ פונקציית תמורה שבהינתן משחק[4]:

- $\psi(N, v)$ הוא וקטור של תמורות לכל שחקן, שמתאר איך מחלקים את התועלת של הקואליציה בין השחקנים
- $\psi_i(N, v)$ היא התמורה לשחקן הi

אפשר גם להגדיר בקצרה $x \in \mathbb{R}^N$ - ווקטור לכל שחקן בN - כאשר, המשחק implicit - כלומר מסתכלים על הערך של הgrand coalition(קואליציה של כל השחקנים - נותנת את הערך המקסימלי).

חלוקת Shapley - תכונת שנרצה שיהיו לחלוקה

- סימטריה - לכל v, אם i, j ניתנים להחלפה(כלומר לכל S כך ש$i \notin S$ ו$j \notin S$ מתקיים $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$), אז $\psi_i(N, v) = \psi_j(N, v)$
- dummy player - אם שחקן מסויים לא מוסיף כלום מעבר לערך של עצמם לאף קואליציה - כלומר $\forall_{S, i \notin S} v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(\{i\})$ - אז נרצה שהוא יקבל רק את הערך של עצמו $\psi_i(N, v) = v(\{i\})$.
- additivity - לכל שתי פונקציות תמורה v_1, v_2, אם יש פונקציה $v = v_1 + v_2$ - כלומר $\forall_S v(S) = (v_1 + v_2)(S) := v_1(S) + v_2(S)$ - אזי לכל שחקן i צריך להתקיים $\psi_i(N, v_1 + v_2) = \psi_i(N, v_1) + \psi_i(N, v_2)$.

חלוקת Shapley

משפט: בהינתן משחק קואליציה (N, v), קיימת דרך יחידה לחלוקת התמורה $x(v) = \phi(N, v)$ שמקיימת של שלושת האקסיומות.

ערך Shapley נותן לכל שחקן את הערך הממוצע שהוא מוסיף לקואליציה. כלומר:

$$\phi_i(N, v) = \frac{1}{N!} \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} |S|! (|N| - |S| - 1)! [v(S \cup \{i\}) - v(S)]$$

כלומר מסתכלים על כל הסידורים האפשריים לקבלת grand coalition, מתסכלים על התוספת השולית - הערך שi מוסיף לקואליציה בשלב בו מוסיפים אותו - ועושים ממוצע.

[4] $N \in \mathbb{N}$ ופונקציית תמורה $v \in \mathbb{R}^{2^{|N|}}$(איזומורפי ל$v : 2^N \to \mathbb{R}$)