# תרגיל 8 מופשטת 3

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. חשבו את חבורות גלואה של ההרחבות הבאות:

(א) $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{4})/\mathbb{Q}$.
**פתרון:** הפולינום $x^5-4$ מאפס את $\sqrt[5]{4}$. (זה לא כל כך ברור שהוא מינימלי אבל זה לא חשוב כרגע). נשים לב ששאר השורשים שלו מרוכבים. כל $\varphi\in\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[5]{4})/\mathbb{Q})$ חייב לשלוח את $\sqrt[5]{4}$ לשורש אחר. אבל שאר השורשים מרוכבים ולכן

$$\varphi(\sqrt[5]{4})=\sqrt[5]{4}$$

כלומר

$$\varphi=\mathrm{id}$$

כלומר חבורת גלואה טריויאלית.

(ב) $E/\mathbb{Q}$ כאשר $E$ הוא שדה הפיצול של $x^3-5$.
**פתרון:** חבורת גלואה מריכה להיות תת חבורה של $S_3$. אבל המימד $[E:\mathbb{Q}]=6$ ולכן חבורת גלואה היא כל

$$S_3$$

(ג) $E/\mathbb{Q}$ כאשר $E$ הוא שדה הפיצול של $x^7-1$.
**פתרון:** $E=\mathbb{Q}(\rho)$ כאשר $\rho$ הוא שורש 7 פרימיטיבי של 1. המימד $[\mathbb{Q}(\rho):\mathbb{Q}]=6$. כמו כן יש איבר בחבורת גלואה שמקיים

$$\varphi(\rho)=\rho^2$$

זה איבר מסדר 6 כי

$$\varphi^6(\rho)=\rho^{64}=\rho=\mathrm{id}(\rho)$$

וזו החזקה הכי נמוכה שזה קורה. ולכן חבורת גלואה היא $\mathbb{Z}_6$

(ד) $E/\mathbb{Q}$ כאשר $E$ הוא שדה הפיצול של $x^4+1$.
**פתרון:** נסמן $\rho=e^{\frac{2\pi i}{8}}$הפתרונות של הפולינום הם $\rho,\rho^3,\rho^5,\rho^7$. נשים לב ש $E=\mathbb{Q}(\rho)$. ולכן המימד של ההרחבה הוא לכל היותר 4. מצד שני בחבורת גלואה יש לפחות 4 איברים כי לכל שורש יש איבר

$$\varphi\in\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\rho)/\mathbb{Q})$$

ששולח את $\sqrt{i}$ לשורש הזה. היות שגודל חבורת גלואה הוא המימד (כי זו הרחבת גלואה) נקבל שחבורת גלואה בגודל 4. נעבור האוטומורפיזמים כדי להבין מה החבורה בדיוק.

כל אוטומורפיזם $\varphi$ בחבורת גלואה הרי נקבע לפי הפעולה שלו על $\rho$. חייב להתקיים

$$\varphi_2(\rho) = \rho^k$$

כאשר $k \in \{1,3,5,7\}$ נשים לב שבכל מקרה

$$\varphi^2(\rho) = \rho$$

כלומר כל האיברים מסדר 2 ולכן החבורה היא $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

(ה) $E/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ כאשר $E$ הוא שדה הפיצול של $x^4+1$.

**פתרון:** נשים לב ש $\rho$ מהסעיף הקודם הוא

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

ולכן

$$E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$$

ולכן זו הרחבת גלואה ממימד 2 וחבורת גלואה היא $\mathbb{Z}_2$.

2. תהי $K/F$ הרחבת שדות ממימד 2 של שדות ממאפיין שונה מ 2. הוכיחו כי זו הרחבת גלואה.
**פתרון:** כבר ראינו (תרגיל בית 5 שאלה 4) שבהרחבה ממימד 2 $K$ חייב להיות שדה פיצול של פולינום מעל $F$. אז זו הרחבה נורמלית. נניח $K$ הוא שדה פיצול של $f(x) = x^2+bx+c$. כמובן שיש ל $f(x)$ שני שורשים שונים (אם היה לו שורש אחד אז לפי נוסחת שורשים הוא היה $-\frac{b}{2}$ ואז $f(x)$ היה מתפצל כבר מעל $F$ - פה בעצם משתמשים בעובדה שנמאפיין שונה מ 2). ולכן $f(x)$ ספרבילי. לכן ההרחבה היא הרחבת גלואה.

3. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: אם $E/K$ הרחבה נורמלית ו $K/F$ הרחבה נורמלית אז $E/F$ הרחבה נורמלית.
**פתרון:** הפרכה: ניקח $F = \mathbb{Q}$ , $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ו $E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$. שתי ההרחבות $K/F$ ו $E/K$ הן נורמליות כי הן לפי התרגיל הקודם ממימד 2. אבל ההרחבה $E/F$ לא נורמלית. הפולינום המינימלי של $\sqrt[4]{2}$ הוא $x^4-2$ (אי פריק לפי אייזנשטיין). לפולינום זה יש שורשים מרוכבים שאינם ב $E$ ולכן ההרחבה לא נורמלית.