

## אינפי 4 - תרגיל 3 - בנוס

המטרה של התרגילים הבאים להגדיר אוריינטציה של מסילה באופן מספיק פורמלי ולהוכיח מספר תכונות בסיסיות שלה.

**תרגיל 3.1.** תהא  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  מסילה חלקה וח"ע בעלת תמונה  $\Gamma$ . לכל  $x \in \Gamma$  נגדיר את וקטור היחידה  $T(x) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ . הוכיחו ש  $T : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  היא פונקציה רציפה.

**הגדרה 3.2.** הפונקציה  $T$  נקראת אוריינטציה המושרית על ידי  $\gamma$  והזוג  $(\Gamma, T)$  נקרא עקומה מכוונת.

**תרגיל 3.3.** תהינה  $\delta, \gamma$  עקומות שקולות עם תמונה  $\Gamma$ . תהי  $T$  האוריינטציה המושרית על ידי  $\gamma$  ו  $S$  האוריינטציה המושרית על ידי  $\delta$ . הוכיחו ש  $T = S$ . (רמז: תשתמשו בהגדרה של שקילות עקומות, של האוריינטציה המושרית מהשאלה הקדומת ובכלל שרשרת).

בתרגיל הבא, נמצא את כל הפרמטריזציות החלקות של של מסילות פשוטות, עד כדי שקילות.

**תרגיל 3.4.** תהינה  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \delta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  פרמטריזציות חלקות וח"ע של העקומה  $\Gamma$  כך ש  $\gamma(a) = \delta(c)$  ו  $\gamma(b) = \delta(d)$ .

1. הוכיחו ש  $\delta^{-1} \circ \gamma : [a, b] \rightarrow [c, d]$  מוגדרת היטב.

2. הוכיחו ש  $\delta^{-1} \circ \gamma : [a, b] \rightarrow [c, d]$  מונוטונית עולה ממש.

3. הוכיחו ש  $\delta^{-1} \circ \gamma : [a, b] \rightarrow [c, d]$  גזירה ברציפות והסיקו ש  $\delta$  ו  $\gamma$  שקולות. (הדרכה: ניתן להוכיח את הטענה לפחות ב 2 דרכים. דרך אחת: מהמשפט מתרגול 1 ידוע ש  $\gamma$  שקולה ל  $\tilde{\gamma}$  ו  $\delta$  שקולה ל  $\tilde{\delta}$ , כאשר  $\tilde{\gamma}$  ו  $\tilde{\delta}$  הן עקומות בעלות מהירות יחידה. הראו ש  $\tilde{\gamma}$  ו  $\tilde{\delta}$  שוות והסיקו ש  $\gamma$  ו  $\delta$  שקולות. דרך שניה - נסמן  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ . לכל  $t \in [c, d]$  הראו שקיים  $1 \leq i \leq n$  כך ש  $\delta_i$  ח"ע בסביבה פתוחה  $(m, n)$  של  $t$ . הראו שקיימת סביבה פתוחה של  $t$  וסביבה פתוחה של  $\delta_i(t)$  כך  $\delta_i$  היא פונ' ח"ע ועל בינה, בעלת נגזרת רציפה שונה מ 0 ובעזרת משפט הפונ' ההפוכה הוכיחו ש  $\delta_i^{-1}$  אף היא גזירה ברצפות. בעזרת הפונקציות  $\delta_i^{-1}$  הראו שבכל נקודה של  $[a, b]$  קיימת פונ' שגזירה ברציפות ומתלכדת עם  $\delta^{-1} \circ \gamma$  ועסיקו את הדרוש).

4. הראו שאם ל  $\Gamma$  קיימת פרמטריזציה ח"ע  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$ , אזי לכל פרמטריזציה ח"ע וחלקה של  $\delta : [c, d] \rightarrow \Gamma$  מתקיים  $\delta(c) = \gamma(a)$  ו  $\delta(d) = \gamma(b)$  או  $\delta(c) = \gamma(b)$  ו  $\delta(d) = \gamma(a)$  והסיקו ש  $\Gamma$  קיימות בדיוק 2 פרמטריזציות חלקות וח"ע עד כדי שקילות. הסיקו ש  $\Gamma$  יש בדיוק 2 אוריינטציות אפשריות.