מבני נתונים ואלגוריתמים - הרצאה 15

18 בדצמבר 2011

Min Cut, Max Flow

יהי גרף $G = (V, E)$ מכוון, ויש לנו שני קדקדים מיוחדים - קדקד מקור S וקדקד מטרה T.
c_{ij} היא קיבולת (≤ 0), ומגדירים f_{ij} פונקציה המקיימת:

- $f_{ij} \geq 0$
- $\sum\limits_{i} f_{ij} = \sum\limits_{k} f_{jk}$ למעט S, T.
- $f_{ij} \leq c_{ij}$

נגדיר חלוקה - שתי קבוצות, A, B כך שמתקיים:

- $A \cap B = \emptyset$
- $A \cup B = V$
- $S \in A, T \in B$

נגדיר cut, חיתוך, כך:

$$C(A, B) \sum_{\substack{i \in A \\ j \in B}} c_{ij}$$

בעיית הMin Cut היא:
מה הם A, B עבורם $C(A, B)$ מינימלי?

בעיית הMax Flow:
נגדיר

$$\nu(f) = \sum_{j} f_{sj}$$

מהו ν המקסימלי?
הבעיות הן בעיות דואליות.

טענה

אם $A \subset V$ ו$S \in A$ ו$T \notin A$ אז אם נגדיר:

$$\nu(A) \sum_{\substack{i \in A \\ j \notin A}} f_{ij} - \sum_{\substack{i \notin A \\ j \in A}} f_{ij}$$

אז $\nu(A)$ לא תלוי בבחירת A.

הערה

מכאן ש$\nu(f) = \nu(A)$ כי נבחר $A = \{S\}$.

הוכחה

נוכיח באינדוקציה על גודל A.
אם $|A|=1$ אז $A=\{S\}$ ו$\nu(A)=\nu(S)$.
נניח שנכון ל$|A|=k$.
נוכיח לגבי $|A|=k+1$.
ניקח את האיבר האחרון שהוכנס לA, נסמן אותו בx.

$$\sum_i f_{ix}=\sum_j f_{xj}$$

נסמן:

- z_1 כל הזרימה שיוצאת מ$A\backslash x$ לx
- z_2 - כל הזרימה שיוצאת מx ל$A\backslash x$
- z_3 - כל הזרימה מx לשאר הגרף (לא $A\backslash x$)
- z_4 - כל הזרימה משאר הגרף (לא $A\backslash x$) לx.

כיוון שאנו יודעים שהזרימה שנכנסת לx שווה לזו שיוצאת ממנו נקבל:

$$z_1+z_4=z_2+z_3$$

ההבדל בין $\nu(A\backslash x)$ ל$\nu(A)$ הוא

$$\Delta\nu(A)=-z_1+z_2+z_3-z_4=0$$

לכן אין הבדל בν כאשר מגדילים את A, לכן $\nu(A)$ לא תלוי בבחירת A.

מסקנה

$$\text{Max Flow}\leq\text{Min Cut}$$

כי:

$$\nu(f)=\sum_{\substack{i\in A\\ j\in B}} f_{ij}-\sum_{\substack{i\in B\\ j\in A}} f_{ij}\leq\sum_{\substack{i\in A\\ j\in B}} f_{ij}\leq\sum_{\substack{i\in A\\ j\in B}} c_{ij}=C(A,B)$$

זו <u>דואליות חלשה</u> - לא הוכחנו שוויון בין הבעיות, רק אי שוויון.

הגדרה

נגדיר קיבולת שיורית לכל קשת (i,j):

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{ij}&=c_{ij}-f_{ij}\geq 0\\ \tilde{c}_{ji}&=f_{ij}\end{aligned}$$

נגדיר מסלול מוסיף - מסלול מS לT בו $\min\tilde{c}>0$

אלגוריתם 1 אלגוריתם למציאת Min Cut, Max Flow
אם קיים מסלול מוסיף, הוסף לאורך המסלול זרימה של $\min\tilde{c}$.

טענה

התנאים הבאים שקולים:

1. אין מסלולים מוסיפים.
2. $\nu(f)$ הוא זרימה מקסימלית.
3. הקשתות בעלות קיבולת שיורית של 0 מהוות Min Cut.

הוכחה

- תחילה נוכיח $1 \Rightarrow 2$:
אם היה מסלול מוסיף, הייתי מוסיף אותו לזרימה ואז היינו מקבלים זרימה יותר גדולה, ולכן הזרימה לא מקסימלית.

- $2 \Rightarrow 3$:
הזרימה לאורך הקשתות שמפרידות בין A לB שווה לקיבולת (מאחר והקיבולת השיורית 0). אם כך, מצאנו Flow ששווה לCut.
מאחר וכל Flow קטן או שווה לכל Cut בהכרח הFlow שהתקבל הוא מקסימלי והCut מינימלי.

- $3 \Rightarrow 1$:
אם אין מסלולים מוסיפים, קיים סט של קשתות בעלות קיבולת שיורית 0 שמפרידות את S מT.
נניח שזה לא נכון, אז קיים מסלול בעל קיבולת שיורית לא 0 בכל קשת. מאחר ומס' הקשתות סופי, אז גם המינימום שלהם גדול מ-0.

הגדרה

רכיב קשירות חזק הוא קב' קדקדים שכל אחד מהם קשיר לשני בגרף מכוון.

1. x, y קשירים חזק $\iff$ x, y על מעגל.
2. אם קיים קדקד נוסף במעגל, גם הוא קשיר חזק לx, y.

בDFS יש שתי אפשרויות:

- כל קדקד שx קשיר אליו חזק ולא הגענו אליו בDFS קודם הוא בהכרח צאצא של x בעץ הDFS.
- אם הגעתי לקדקד שx קשיר אליו חזק בDFS לפני x, אז x צאצא שלו.