גיאומטריה דיפרנציאלית - תרגול חזרה

21 באוקטובר 2014

- בתחילת התרגול סיווגנו דוגמה של תבנית ריבועית ב$\mathbb{R}^3$. יש לחזור על הנושא מתוך ההרצאות שם ישנו הסבר מדויק.

0.1 שדות וקטורים

ניתן לחשב את נגזרות הלי ע"י הנוסחה הבאה. אם קיימת מטריקה רימנית אזי:

$$\mathcal{L}_w v = [v, w] = \nabla_v w - \nabla_w v$$

(ז"א ע"י חישוב הנגזרות הקוואריאנטיות). למעשה עבור פונקציה f אותה גוזרים לפי שדות וקטורים v, w

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial}{\partial v} f\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial}{\partial w} f\right) = g = \frac{\partial}{\partial [v, w]} f$$

0.1.1 דוגמה:

משטח r מוגדר ע"י

$$r(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$$

זוהי הפרמטריזציה של הספירה כמשטח סיבוב של חצי עיגול. נתונים שני שדות וקטורים:

$$\begin{aligned} v &= (-\sin\theta \sin\phi, \cos\theta \sin\phi, 0) \\ w &= (0, 1, -\sin\theta \tan\phi) \end{aligned}$$

1. הראו שאלו שדות מאונכים לספירה והביעו אותם כצירוף לינארי של r_1, r_2 (תזכורת: $r_i = \frac{\partial r}{\partial x_i}$).
2. חשבו את $[v, w]$.

פתרון

1. נחשב את r_1, r_2:

$$\begin{aligned} r_1 &= (-\sin\theta\sin\phi, \cos\theta\cos\phi, 0) = v \Rightarrow v = 1\cdot r_1 + 0\cdot r_2 \\ r_2 &= (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, -\sin\phi) \end{aligned}$$

צריך למצוא $a(\theta,\phi), b(\theta,\phi)$ כך ש$w = ar_1 + br_2 = (\ldots,\ldots,-\sin\phi\cdot b)$.

$$\Rightarrow \quad b = \frac{\sin\theta}{\cos\phi}$$

$$w = ar_1 + \frac{\sin\theta}{\cos\phi}r_2 = (-a\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\sin\theta, \ldots, \ldots)$$

אם הביטוי האחרון שווה ל־0 :

$$a = \frac{\cos\theta}{\sin\phi}$$

יצא:

$$\begin{aligned} v &= 1\cdot r_1 + 0\cdot r_2 \\ w &= \frac{\cos\theta}{\sin\phi}r_1 + \frac{\sin\theta}{\cos\phi}r_2 \end{aligned}$$

סיימנו את א'. נעבור לב'.

2. $[v,w] = \nabla_w v - \nabla_v w$.

$$\nabla_w v = \left(\frac{\partial v^k}{\partial x_i} + \Gamma_{ij}^k v^j\right) w^i r_k$$

או באופן שקול ללא סימוני איינשטין:

$$\sum_{j,k=1}^{2}\left(\frac{\partial v^k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{2}\Gamma_{ij}^k v^j\right) w^i r_k$$

נשים לב ש:

$$v^1 = 1, v^2 = 0, \quad \frac{\partial v^k}{\partial x_i} = 0, \forall i, k = 1,2$$

$$w^1 = \frac{\cos\theta}{\sin\phi}, w^2 = \frac{\sin\theta}{\cos\phi}$$

צריך לדעת Γ_{ij}^k.

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^2 &= -\sin\phi\cos\phi = -tt' \\ \Gamma_{12}^1 &= \cot\phi = \frac{t'}{t} \end{aligned}$$

היתר הם 0.

$$\Gamma_{i1}^{k} w^i r_k = \Gamma_{11}^{2} w^1 r_2 + \Gamma_{21}^{1} w^1 r_1 = \frac{\sin\theta}{\sin\phi} r_1 - \cos\phi\cos\theta r_2$$

$$\nabla_v w = \left(\frac{\partial w^k}{\partial x_i} + \Gamma_{ij}^{k} w^j\right) v^i r_k = \left(\frac{\partial w^k}{\partial \theta} + \Gamma_{ij}^{k} w^j\right) r_k = \ldots = \left(\frac{\sin\theta\sin\phi}{\cos^2\phi} - \frac{\sin\theta}{\sin\phi}\right) r_1$$

$$\nabla_v w = \left(\frac{\sin\theta\sin\phi}{\cos^2\phi} - \frac{\sin\theta}{\sin\phi}\right) r_1 + \left(\frac{\cos\theta}{\cos\phi} - \cos\phi\cos\theta\right) r_2$$

0.1.2 על המבחן

- יהיו 3 שאלות על משטחים (כולל וקטורים וחישוב דיברגנץ של גרדיאנט = לפלס בלתרמי), 2 על עקומה, 1 על נגזרת לי.
- תהיה צבירה של 117 נקודות.
- במבחן יהיה צורך למצוא:
  - פרמטריזציה במהירות יחידה.
  - עקמומיות, פיתול (לפי נוסחאות).
  - (בנוגע למשטחים) יש למצוא תבנית יסודית ראשונה שנייה, אופרטור צורה, עקמומיות חיצונית, ממוצעת, סימני כריסטופל, מציאת משוואות גאודזיות ע"י מציאת סימני כריסטופל והצבה במשוואות.