<u>תרגיל כיתה 9 – משוואות מסדר ראשון</u>

מתרגל: אדם צ'פמן

משוואות ליניאריות:

משוואה דיפרנציאלית ליניארית היא משוואה מהצורה $y'=p(x)y+q(x)$ כאשר $p(x)$ ו $q(x)$ הן פונקציות כלשהן התלויות ב x בלבד.

אם $q(x)=0$ (אז המשוואה נקראת משוואה לינארית הומוגנית) אז $y'=\frac{dy}{dx}=p(x)y$

ולכן ניתן לבצע הפרדת משתנים $\frac{1}{y}dy=p(x)dx$ ולפתור את המשוואה.

אם $q(x)\neq 0$ אז פותרים קודם כל פותרים את המשוואה ההומוגנית המתאימה $\bar{y}'=p(x)\bar{y}+q(x)$ ומקבלים פיתרון כללי $\bar{y}=f(x)$. מסמנים $y=t\cdot f(x)$ ומציבים זאת במשוואה $y'=p(x)y+q(x)$, ואז מקבלים $t'\cdot f(x)+f'(x)\cdot t=p(x)\cdot t\cdot f(x)+q(x)$. אך $f'(x)=p(x)\cdot f(x)$ ולכן $f'(x)\cdot t=p(x)\cdot t\cdot f(x)$, ולכן אנחנו נשארים עם $t'\cdot f(x)=q(x)$, או לחילופין

$t'=\frac{q(x)}{f(x)}$. מוצאים פיתרון (פרטי, אין צורך בכללי, כלומר בלי הוספת הקבוע) למשוואה זו $t=g(x)$, ואז הפיתרון הכללי למשוואה $y'=p(x)y+q(x)$ הוא $y=(1+g(x))f(x)$.

לסיכום, סדר הפעולות הוא

1. למצוא פיתרון (כללי) למשוואה ההומוגנית $\bar{y}'=p(x)\bar{y}+q(x)$, $\bar{y}=f(x)$.

2. למצוא פיתרון (פרטי) למשוואה $t'=\dfrac{q(x)}{f(x)}$, $t=g(x)$.

3. לבסוף $y=(1+g(x))f(x)$ הוא הפיתרון (הכללי) למשוואה $y'=p(x)y+q(x)$.

הערה: אם מצליחים "לנחש" פיתרון פרטי כלשהו למשוואה $y'=p(x)y+q(x)$, $y=g(x)$, אזי הפיתרון הכללי למשוואה זאת הוא $y=f(x)+g(x)$ כאשר $y=f(x)$ הוא הפיתרון למשוואה ההומוגנית $y'=p(x)y$. כלומר במקרה זה אפשר לדלג על שלב 2 המתואר למעלה.

דוגמאות:

- $y'=y+x$.

נפתור את המשוואה $y'=y$. אז $\dfrac{dy}{dx}=y$, ולכן $\dfrac{1}{y}dy=dx$, משמע $\ln(y)=x+c$

ולבסוף $y=e^{x+c}=De^{x}$ (אם לוקחים $D=e^{c}$). כעת $f(x)=De^{x}$, ו $q(x)=x$.

נחפש פיתרון למשוואה $t'=\dfrac{q(x)}{f(x)}$.

$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{x}{De^{x}}$, ומקבלים $dt=\dfrac{x}{De^{x}}dx$.

[את האינטגרל $\int\dfrac{x}{e^{x}}dx$ מחשבים לפי "אינטגרציה בחלקים". ידוע כי מתקיים

$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$ לכל שתי פונקציות $f(x)$ ו

$g(x)$. ניקח $f(x)=x$ ו $g'(x)=\frac{1}{e^x}$ ואז $g(x)=-\frac{1}{e^x}$ ונקבל

$$[\int \frac{x}{e^x}dx=-\frac{x}{e^x}-\int(-\frac{1}{e^x})dx=-\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}=-\frac{x+1}{e^x}$$

בקיצור, $t=-\frac{x+1}{De^x}$ הוא הפיתרון למשוואה $t'=\frac{q(x)}{f(x)}$. כעת $g(x)=-\frac{x+1}{De^x}$,

והפיתרון למשוואה $y'=y+x$ הוא

$$y=(1+g(x))f(x)=(1-\frac{x+1}{De^x})\cdot De^x=De^x-(x+1).$$

הערה: אפשר "לנחש" את הפיתרון הפרטי למשוואה $y'=y+x$, $y=-x-1$.

[אז מקבלים $y+x=-x-1+x=-1$ מצד ימין ו $y'=-1$ מצד שמאל].

במקרה כזה, אחרי שמגלים ש $y=De^x$ הוא הפיתרון למשוואה ההומוגנית $y'=y$, אפשר

ישר לומר כי $y=De^x-x-1$ הוא הפיתרון הכללי למשוואה $y'=y+x$.

- $xy'+2y=x^2$.

נביא את המשוואה לצורה מוכרת $y'=-\frac{2}{x}y+x$.

נפתור את המשוואה ההומוגנית $y'=-\frac{2}{x}y$. $\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{x}y$, אז $\frac{dy}{y}=-\frac{2}{x}dx$ ומקבלים

$\ln(y)=-2\ln(x)+c$ ואז $y=e^{-2\ln(x)+c}=e^{\ln(x^{-2})}\cdot e^c=\frac{e^c}{x^2}=\frac{D}{x^2}$ [אם לוקחים

$D=e^c$] הוא הפיתרון הכללי למשוואה ההומוגנית. כעת, $f(x)=\frac{D}{x^2}$ ו $q(x)=x$.

נחפש פיתרון למשוואה $t' = \frac{q(x)}{f(x)}$. $\frac{dt}{dx} = \frac{x^3}{D}$, ואז $dt = \frac{x^3}{D}dx$, ולכן $t = \frac{x^4}{4D}$ זה

פיתרון. כעת, $g(x) = \frac{x^4}{4D}$ ו $y = (1+g(x))f(x) = (1+\frac{x^4}{4D})\cdot\frac{D}{x^2} = \frac{D}{x^2} + \frac{x^2}{4}$

הוא הפיתרון הכללי למשוואה $y' = -\frac{2}{x}y + x$.

- $y' - y\tan(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

נביא משוואה זו לצורה מוכרת $y' = \tan(x)y + \frac{1}{\cos(x)}$.

נפתור את המשוואה ההומוגנית $y' = \tan(x)y$. $\frac{dy}{dx} = \tan(x)y$, אז

$\frac{dy}{y} = \tan(x)dx$.

[את האינטגרל $\int \tan(x)dx$ מחשבים באופן הבא: $\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$.

מציבים $t = \cos(x)$ ואז $\frac{dt}{dx} = -\sin(x)$ ולכן

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = \int \frac{-dt}{t} = -\ln(t) = -\ln(\cos(x))$$]

בקיצור, מקבלים ש $\ln(y)=-\ln(\cos(x))+c$ ולכן

$y=e^{-\ln(\cos(x))+c}=\dfrac{e^c}{\cos(x)}=\dfrac{D}{\cos(x)}$ זה הפיתרון למשוואה ההומגנית.

כעת, $f(x)=\dfrac{D}{\cos(x)}$ ו $q=\dfrac{1}{\cos(x)}$. נחפש פיתרון למשוואה $t'=\dfrac{q(x)}{f(x)}$.

$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{D}$, ולכן $dt=\dfrac{1}{D}dx$ ומקבלים ש $t=\dfrac{1}{D}x$. כעת, $g(x)=\dfrac{1}{D}x$ ו

$$y=(1+g(x))f(x)=(1+\frac{1}{D}x)\cdot\frac{D}{\cos(x)}=\frac{D}{\cos(x)}+\frac{x}{\cos(x)}.$$

משוואות ברנולי:

משוואה מהצורה $y'=P(x)y+Q(x)y^n$ כאשר $P(x)$ ו $Q(x)$ הן פונקציות כלשהן, נקראת משוואת ברנולי. נחלק את שני האגפים ב y^n ונקבל את המשוואה $y^{-n}y=P(x)y^{1-n}+Q(x)$. אם מציבים $z=y^{1-n}$ אז $z'=(1-n)y^{-n}y'$ ואז המשוואה הופכת להיות $z'=(1-n)P(x)z+(1-n)Q(x)$ וזו כבר ממש משוואה ליניארית.

לסיכום, סדר הפעולות לפיתרון משוואת ברנולי הוא כדלקמן:

1. פותרים את המשוואה $z'=(1-n)P(x)z+(1-n)Q(x)$ ומקבלים פיתרון כללי $z=f(x)$.
2. מציבים $z=y^{1-n}$ ומקבלים שהפיתרון למשוואת ברנולי הוא $y^{1-n}=f(x)$.

דוגמאות:

- $y' = y + y^2$.

$n=2$. המשוואה הליניארית המתאימה היא $z' = -z - 1$.

נפתור את המשוואה ההומוגנית המתאימה $z' = -z$. $\frac{dz}{dx} = -z$, ואז $\frac{dz}{z} = -dx$, ולכן

$\ln(z) = -x + c$, משמע $z = e^{-x+c} = De^{-x}$.

נפתור את המשוואה $t' = \frac{-1}{De^{-x}} = \frac{-e^x}{D}$. הפיתרון הינו $t = -\frac{e^x}{D}$. נקבל כי הפיתרון

הכללי למשוואה $z' = -z - 1$ הוא $z = (1 - \frac{1}{D}e^x)De^{-x} = De^{-x} - 1$.

$z = y^{-1}$. נציב ונקבל כי $y = \frac{1}{De^{-x} - 1}$ הוא הפיתרון הכללי למשוואה $y' = y + y^2$.

- $y' = y^4 \cos(x) + y \tan(x)$

$n=4$. ע"י הצבת $z = y^{-3}$ מקבלים את המשוואה $z' = -3\tan(x)z - 3\cos(x)$.

נפתור המשוואה ההומוגנית המתאימה $z' = -3\tan(x)z$.

$\frac{dz}{dx} = -3\tan(x)z$, ואז $\frac{dz}{z} = -3\tan(x)dx$.

[את האינטגרל $\int \tan(x)dx$ מחשבים כך: מתקיים $\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. מציבים

$r=\cos(x)$ ואז $\dfrac{dr}{dx}=-\sin(x)$, ומקבלים ש

$$\int \tan(x)dx=-\int \frac{1}{r}dr=-\ln(r)=-\ln(\cos(x))$$]

בקיצור, מקבלים $\ln(z)=3\ln(\cos(x))+c$ ולכן $z=D(\cos(x))^3$.

נחשב פיתרון למשוואה $t'=\dfrac{1}{D(\cos(x))^2}$.

הפיתרון אם כן הוא $t=\dfrac{1}{D}\tan(x)$.

לכן הפיתרון הכללי למשוואה $z'=-3\tan(x)z-3\cos(x)$ הוא

$$z=(1+\frac{\tan(x)}{D})D(\cos(x))^3=D(\cos(x))^3+\sin(x)(\cos(x))^2$$

מציבים $z=y^{-3}$ במשוואה ומקבלים ש $y^{-3}=D(\cos(x))^3+\sin(x)(\cos(x))^2$ הוא

הפיתרון הכללי למשוואה $y'=y^4\cos(x)+y\tan(x)$.

משוואות עם תנאי התחלה:

לעיתים למשוואה דיפרנציאלית מסויימת $y'=f(x,y)$ מתלווה תנאי התחלה שאומר

שהפיתרון $y=g(x)$ למשוואה הדיפרנציאלית הנ"ל (אם קיים) צריך לקיים

$y_0=g(x_0)$ עבור איזשהם x_0 ו y_0 נתונים.

לפעמים רושמים את תנאי ההתחלה כ $y(x_0)=y_0$ ולעיתים פשוט אומרים שמחפשים פונקציה המקיימת את המשוואה הדיפרנציאלית הנ"ל ועוברת בנקודה (x_0,y_0).

למשוואה כזאת עם תנאי התחלה יכול להתקיים אחד מהמצבים הבאים:

1. יש פיתרון יחיד.
2. אין פיתרון כלל.
3. ישנו יותר מפיתרון אחד.

ישנם משפטים שאמורים לסייע להחליט לגבי הסוגייה הזאת, אך הדרך הפשוטה ביותר היא פשוט לפתור את המשוואה הדיפרנציאלית ולהבין ממנה לאיזה מצב אנו נקלעים.

דוגמאות:

- $y'=\dfrac{y}{x}$.

הפיתרון הכללי למשוואה זאת הוא $y=Dx$ לכל D שהוא.

נגיד שיש לנו תנאי ההתחלה והוא $\left(x_0,y_0\right)$.

אם $x_0\neq 0$ אז $y_0=Dx_0$ ולכן $D=\dfrac{y_0}{x_0}$. כלומר, תנאי ההתחלה במקרה הזה קובע מהו D באופן יחיד, ולכן ישנו פיתרון יחיד.

אם $x_0=0$ וגם $y_0=0$ אזי המשוואה $y_0=Dx_0$ הופכת להיות $0=0$ וזה מתקיים תמיד, לכל D שהוא, ולכן ישנם אינסוף פיתרונות.

אם $x_0=0$ וגם $y_0\neq 0$ אזי המשוואה $y_0=Dx_0$ הופכת להיות $y_0=0$ וזה לא מתקיים לעולם, ולכן אין פיתרון.

- $y'=2\sqrt{y}$

הפיתרון הכללי של משוואה זו הוא $\sqrt{y} = x + c$. שוב, תנאי ההתחלה הוא (x_0, y_0).

אין כלל פיתרון (בגלל תחום ההגדרה) עבור $y_0 < 0$.

עבור $y_0 > 0$ מתקיים $\sqrt{y_0} = x_0 + c$ ואז $\sqrt{y_0} - x_0 = c$, ולכן ישנו פיתרון יחיד.