מבנים דיסקרטיים – תרגיל 3
להגשה בתאריך 9.4.2013

1. G חבורה. הוכח כי עבור $a,b\in G$ מתקיים $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$. ואם G חבורה קומוטטיבית אז $\qquad (ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1} \quad \forall a,b\in G$

2. G חבורה קומוטטיבית, $g,h\in G: g^2=h^3=e_G \wedge g,h^2\neq e_G$ (כלומר 2 סדר של g ו 3 סדר של h). מהו הסדר של gh ?

3. מצאו בS_3 איברים g,h כבשאלה 2. מהו סדר gh? האם זה מהווה סתירה ל 2?

4. נביט בקבוצה $(\mathbb{N}\cup\{0\})\times(\mathbb{N}\cup\{0\})$ ונגדיר פעולה * על הקבוצה המקיימת
$$(a,b)*(c,d)=\begin{cases}(a+c-b,d) & c>b\\ (a,b-c+d) & otherwise\end{cases}.$$
   a. הראו כי הקבוצה יחד עם הפעולה הנ"ל מהווה מונויד.
   b. מהי קבוצת האיברים ההפיכים משמאל? האם היא חבורה?

5. נסמן ב U_n את תת-הקבוצה של איברים ב $\mathbb{Z}_n$ כך שאין להם מחלק משותף עם n. לדוגמא $U_6=\{1,5\}$. נתייחס ל U_n כקבוצה עם פעולת כפל, לדוגמה $5\cdot 5=25=1\ (\mathrm{mod}\, 6)$ ב U_6. מצאו את U_6,U_7,U_8 ובנו להם טבלאות כפל.

6. תהי G חבורה בה מתקיים $\forall a,b\in G,\ (ab)^2=a^2b^2$. הראו ש G חבורה אבלית.

7. תהי G חבורה (לאו דווקא אבלית) ויהיו $g,h\in G$ שני איברים שונים מסדר 2. הראו שבהכרח קיים לפחות איבר נוסף בחבורה מסדר 2 (השונה מ g,h).