תזכורת: אם f היא פונק' אנליטית בתחום D ו-γ עקומה סגורה פשוטה המוכלת ב-D ו-$\alpha \in D$ נקודה ב-D המוכלת בפנים של γ אז

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-\alpha}\, dz$$

אם α נמצאת מחוץ ל-γ אז האינטגרל מימין מתאפס

פתרון: חשבו את האינטגרל $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a+\sin^2 x}$ כאשר $a > 1$.

פיתרון:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a+\sin^2 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{2dx}{2a+1-\cos(2x)}$$

נעשה החלפת משתנים $y = 2x$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{dy}{2a+1-\cos y} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dy}{2a+1-\cos y}$$

כעת נעשה החלפת משתנים $z = e^{iy}$ ואז $\cos y = \frac{z+z^{-1}}{2}$ ו-$dy = \frac{dz}{iz}$ ולכן

$$I = \frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{2a+1-\frac{z+z^{-1}}{2}} = \frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{-\frac{z^2}{2}+(2a+1)z-\frac{1}{2}}$$

$$= \int_{|z|=1} \frac{i\,dz}{z^2-2(2a+1)z+1} = \int_{|z|=1} \frac{i\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

כאשר z_1, z_2 הם השורשים של המשוואה

$z^2 - 2(2a+1)z + 1 = 0$ כיוון ש- $z_1 \cdot z_2 = 1$

אפשר להניח ש- $|z_1| > 1$ ו- $|z_2| < 1$. לכן

$$I = \frac{1}{z_1 - z_2} \int_{|z|=1} \frac{i\,dz}{z - z_1} - \frac{i\,dz}{z - z_2}$$

לפי משפט קושי האינטגרל הראשון מתאפס והאינטגרל השני שווה ל- 2π ולכן

$$I = \frac{2\pi}{z_1 - z_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{(z_1 + z_2)^2 - 4z_1 z_2}}$$

מנוסחאות וייטה נקבל $z_1 \cdot z_2 = 1$ ו- $z_1 + z_2 = 2(2a+1)$

ולכן

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{(2(2a+1))^2 - 4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{a(a+1)}}$$

<u>עקרון המקסימום (המינימום)</u>

תהי f פונקציה אנליטית בתחום חסום R
אז הערך המקסימלי של $|f|$ מתקבל על השפה
של R ואם $|f|$ מקבלת את הערך המקסימלי
גם בנקודה פנימית $z_0 \in R$ אזי f קבועה.
ואם $f \neq 0$ בכל נקודה ב- R אזי מתקיים
עקרון המינימום: הערך המינימלי של $|f|$
מתקבל בשפה של R ואם $|f|$ מקבלת מינימום

(3) הערך המינימלי של עקרון המודולוס, פונקציות $z_0 \in R$
אז f מקבלת בשפה.

שאלה: מצאו את המקסימום של הפונקציות הבאות בתחום $|z| \le 1$:

א. $f(z)=\frac{1-z^4}{1-z}$ ב. $f(z)=\cosh(z)$

פתרון: א. לפי נוסחת הסכום $\frac{1-z^4}{1-z}=1+z+z^2+z^3$

f אנליטית ולכן המקסימום מתקבל כאשר $|z|=1$,
(מעקרון המקסימום)

$$|f(z)|=|1+z+z^2+z^3| \le |1|+|z|+|z^2|+|z^3| = 4$$

נשים לב ש- $f(1)=4$ ולכן המקסימום של f
בתחום $|z|\le 1$ שווה ל-4.

ב. $f(z)=\cosh(z)=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$ היא פונ' שלמה
ולכן מקבלת את המקסימום כאשר $|z|=1$
נציב $z=e^{i\theta}$ ונקבל ש-

$$|f(e^{i\theta})| = \frac{1}{2}\left| e^{e^{i\theta}} + e^{-e^{i\theta}} \right|$$

$$= \frac{1}{2}\left| e^{\cos\theta + i\sin\theta} + e^{-\cos\theta - i\sin\theta} \right|$$

$$\le \frac{1}{2}\left| e^{\cos\theta + i\sin\theta}\right| + \frac{1}{2}\left| e^{-\cos\theta - i\sin\theta} \right|$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\cos\theta} + e^{-\cos\theta}\right) = \cosh(\cos\theta)$$

(4) המקסימום של הפונ' $\theta \mapsto \cosh(\cos\theta)$
מתקבל כאשר $\theta = 0, \pi$ ושווה לערך $\frac{1}{2}(e+e^{-1})$
ולכן $|f(z)| \leq \frac{1}{2}(e+e^{-1})$ מצב
אך $f(1) = \frac{1}{2}(e+e^{-1})$ ולכן המקסימום של $|f|$
בתחום $|z| \leq 1$.