

# אלגברה מופשטת - תרגיל 1

- על התרגיל יש לרשום: שם, תעודת זהות, שם המתרגל.
- יש להגיש את התרגיל **ללא** ניילוניות ו/או קלסרים! אלא בקובץ דפים מהודק מצד ימין!

## שאלה 1

בדקו האם קבוצת המספרים הממשיים  $\mathbb{R}$  מהווה חבורה למחצה לגבי הפעולות הבינאריות הבאות:

$$a * b = a^2 + ab \quad (\alpha)$$

$$a * b = \sqrt{a+b} \quad (\beta)$$

$$a * b = (a^2 + b^2) / 2 \quad (\gamma)$$

## שאלה 2

בדקו עבור כל אחת מהקבוצות הבאות עם הפעולות הנתונות האם היא: חבורה למחצה/מונואיד/חבורה. כמו כן, בדקו האם הפעולה היא קומוטטיבית.

א.  $(\mathbb{Z}, \bullet)$  כאשר  $a \bullet b = a + b + 2$

ב.  $(\mathbb{Z}_4, \cdot)$

ג.  $(\mathbb{Z}, -)$

ד.  $(Map(\mathbb{N}, \mathbb{N}), \circ)$  כאשר  $Map(\mathbb{N}, \mathbb{N}) = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$

ה.  $(P(X), \Delta)$ , כאשר  $X$  קבוצה כלשהי ו- $\Delta$  ההפרש הסימטרי המוגדר ע"י  
 $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$  לכל  $A, B \in P(X)$ .

## שאלה 3

א. תהי  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . על המכפלה הקרטזית  $A \times A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$  נגדיר פעולה בינרית ע"י  $(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ , כאשר הפעולות באגף ימין הן חיבור וכפל מודולו 7.

(i) הוכיחו ש- $A \times A$  מונואיד קומוטטיבי.

(ii) האם כל איבר ב- $A \times A$ , פרט ל- $(0, 0)$ , הוא הפיך?

ב. אותה שאלה כמו בא', כאשר  $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  והפעולות הן מודולו 5.  
(i) הוכח ש- $A \times A$  מונואיד קומוטטיבי.

(ii) האם כל איבר ב- $A \times A$ , פרט ל- $(0, 0)$ , הוא הפיך?

#### שאלה 4

האם  $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$  היא חבורה למחצה, מונואיד או חבורה (ביחס לפעולת

כפל מטריצות)?

#### שאלה 5

א. הוכיחו: אם בחבורה למחצה יש יחידה מימין  $e$  ויחידה משמאל  $e'$  אזי  $e = e'$ .

ב. בחבורה למחצה  $S$  יש 7 יחידות משמאל. כמה יחידות מימין יש בה?

**בהצלחה!**