

## אינפי 4 – תרגול 10

### דיברגנץ

יהי שדה וקטורי  $F(x, y, z) = f(x, y, z)i + g(x, y, z)j + h(x, y, z)k$ , נניח ואנו רוצים למצוא את השטף סביב הנקודה  $(x, y, z)$ . ניקח ספירה  $S((x, y, z), r)$  ברדיוס  $r$  ונחשב את השטף עליה ונחלק בשטח שלה. אם נשאיף את  $r \rightarrow 0$  נקבל כי

$$\frac{1}{|S((x, y, z), r)|} \int_{S((x, y, z), r)} F \cdot \mathbf{n} dS \rightarrow \operatorname{div} F(x, y, z) = \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right)(x, y, z)$$

כלומר, האופרטור  $\operatorname{div}$  נותן לנו את השטף בנקודה  $(x, y, z)$ .

**משפט (גאוס):** יהי  $G$  גוף שלשפתו  $\sigma$  אוריינטציה חיצונית. אם

$$F(x, y, z) = f(x, y, z)i + g(x, y, z)j + h(x, y, z)k$$

כאשר  $f, g, h$  הן פונקציות בעלות נגזרות חלקיות רציפות מסדר ראשון בקבוצה פתוחה כלשהי המכילה את  $G$ , אז

$$\iint_{\sigma} F(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) dS = \iiint_G \operatorname{div} F dV$$

דוגמא: יהי  $\sigma$  המשטח הכדורי  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , ומכוונו חיצוני. חשב בעזרת משפט הדיברגנץ את השטף דרך  $\sigma$  של השדה הוקטורי  $F(x, y, z) = z\mathbf{k}$ .

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial z}{\partial z} = 1 \text{ - פתרון: הדיברגנץ של השדה הוקטורי הוא } 1$$

לכן, אם  $G$  מסמן את הכדור הכלוא ב  $\sigma$ , נקבל כי השטף  $\Phi$  דרך  $\sigma$  הוא –

$$\Phi = \iint_{\sigma} F \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_G dV = \text{the volume of } G = \frac{4\pi a^3}{3}$$

דוגמא: יהי  $\sigma$  פני הקובייה  $[0, 1]^3$  ולו מכוון חיצוני. חשב בעזרת משפט הדיברגנץ את השטף דרך  $\sigma$  של השדה הוקטורי  $F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ .

פתרון: הדיברגנץ של השדה הוקטורי הוא –

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(3y) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) = 5 + 2z$$

לכן, אם  $G$  מסמן את הקובייה הכלואה ב  $\sigma$ , נקבל כי השטף דרך  $\sigma$  הוא

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{\sigma} F \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_G (5+2z) dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (5+2z) dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 6 dy dx = 6\end{aligned}$$

דוגמא: יהי  $\sigma$  פני הגוף הכלוא בגליל  $x^2 + y^2 = 9$ , בין המישורים  $z = 0$  ו  $z = 2$ , ולו מכוון חיצוני.  
חשב בעזרת משפט הדיברגנץ את השטף דרך  $\sigma$  של השדה הוקטורי  $F(x, y, z) = x^3 i + y^3 j + z^2 k$ .

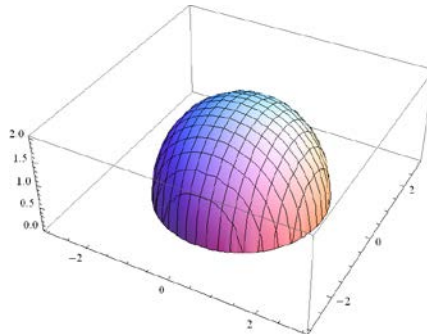
פתרון: הדיברגנץ של השדה הוקטורי הוא –

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) = 3x^2 + 3y^2 + 2z$$

לכן, אם  $G$  מסמן את הגליל הכלוא ב  $\sigma$ , נקבל שהשטף  $\Phi$  דרך  $\sigma$  הוא –

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{\sigma} F \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_G (3x^2 + 3y^2 + 2z) dV = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^2 (3r^2 + 2z) r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (6r^3 + 4r) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{279}{2} d\theta = 279\pi\end{aligned}$$

דוגמא: יהי  $\sigma$  פני הגוף המוגבל על ידי מחצית פני הכדור  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  ועל ידי המישור  $z = 0$ , ולו מכוון חיצוני. חשב בעזרת משפט הדיברגנץ את השטף דרך  $\sigma$  של השדה הוקטורי  $F(x, y, z) = x^3 i + y^3 j + z^3 k$ .



פתרון: הדיברגנץ של השדה הוקטורי הוא  $\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$

לכן, אם  $G$  מבמן את חצי הכדור הכלוא ב  $\sigma$ , נקבל כי השטף  $\Phi$  דרך  $\sigma$  הוא –

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{\sigma} F \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_G 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a (3\rho^2) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a (3\rho^2) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \frac{3a^5}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi d\phi d\theta = \frac{3a^5}{5} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{6\pi a^5}{5}\end{aligned}$$