תרגול 8 – 88-112 אלגברה לינארית 1
סמסטר א' תשע"ו

דצמבר 2015

תרגיל 0.1 (לחימום הקנה)**.** נניח ש-$\{v_1, \ldots, v_n\}$ בת"ל. לאילו ערכים של הפרמטר $\lambda \in \mathbb{F}$ הקבוצה $\{v_1 - \lambda v_2, v_2 - \lambda v_3, \ldots, v_n - \lambda v_1\}$ בת"ל?

פתרון. יהי צירוף לינארי מתאפס

$$\alpha_1 (v_1 - \lambda v_2) + \alpha_2 (v_2 - \lambda v_3) + \cdots + \alpha_n (v_n - \lambda v_1) = 0$$

נארגן מחדש לפי הווקטורים המקוריים ונקבל:

$$(\alpha_1 - \lambda \alpha_n) v_1 + (\alpha_2 - \lambda \alpha_1) v_2 + \cdots + (\alpha_n - \lambda \alpha_{n-1}) v_n = 0$$

כיוון ש-$\{v_1, \ldots, v_n\}$ בת"ל, נקבל את המשוואות:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \lambda \alpha_n = 0 \\ \alpha_2 - \lambda \alpha_1 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n - \lambda \alpha_{n-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \lambda \alpha_n \\ \alpha_2 = \lambda \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n = \lambda \alpha_{n-1} \end{cases}$$

לכן נקבל

$$\alpha_1 = \lambda \alpha_n = \lambda^2 \alpha_{n-1} = \lambda^3 \alpha_{n-2} = \cdots = \lambda^n \alpha_1$$

אם $\alpha_1 = 0$, נקבל את הצירוף הלינארי הטריוויאלי. לכן נניח $\alpha_1 \neq 0$, נחלק בו ונקבל $\lambda^n = 1$.
לכן $\{v_1 - \lambda v_2, v_2 - \lambda v_3, \ldots, v_n - \lambda v_1\}$ בת"ל אם ורק אם $\lambda^n = 1$.

1 בסיס ומימד

הערה 1.1. אנחנו מתעניינים במרחבים וקטוריים **נוצרים סופית**, כלומר שיש להם קבוצה פורשת סופית.

הגדרה 1.2. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. קבוצה $B \subseteq V$ נקראת **בסיס**, אם היא פורשת את V ובת"ל. **המימד** של V הוא $\dim V = |B|$.

משפט 1.3. המימד של מרחב וקטורי מוגדר היטב.

דוגמה 1.4. נציג מספר דוגמאות לבסיסים של מרחבים.

1. **הבסיס הסטנדרטי** של $\mathbb{F}^n$ הוא $\{e_1,\dots,e_n\}$. לכן $\dim\mathbb{F}^n=n$.
2. **הבסיס הסטנדרטי** של $\mathbb{F}^{m\times n}$ הוא $\{E_{ij}|1\le i\le m,1\le j\le n\}$, כאשר E_{ij} היא המטריצה שיש לה 1 במקום ה-(i,j) ו-0 בשאר המקומות. לכן $\dim\mathbb{F}^{m\times n}=mn$.
3. **הבסיס הסטנדרטי** של $\mathbb{F}_n\left[x\right]$ הוא $\{1,x,\dots,x^n\}$. לכן $\dim\mathbb{F}_n\left[x\right]=n+1$.
4. **הבסיס הסטנדרטי** של $\mathbb{F}\left[x\right]$ הוא $\{1,x,\dots\}$. לכן $\dim\mathbb{F}\left[x\right]=\infty$.
5. הבסיס של $\{0\}$ הוא $\varnothing$.

משפט 1.5. לכל מרחב וקטורי קיים בסיס.

תרגיל 1.6. הוכיחו ש-$\{1+3x,2+5x\}$ בסיס של $\mathbb{R}_1\left[x\right]$.

הוכחה. נבדוק שהקבוצה בת"ל ופורשת.

בת"ל: לפי האלגוריתם שראינו בתרגול הקודם, נשים את הווקטורים בעמודות מטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-3R_1\to R_2}\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}$$

הצורה הזו מדורגת ואין בה משתנים חופשיים, ולכן הווקטורים בת"ל.

פורשת: יהי $a+bx\in\mathbb{R}_1\left[x\right]$. רוצים לבדוק שקיימים $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ שעבורם

$$\alpha\left(1+3x\right)+\beta\left(2+5x\right)=a+bx$$

כלומר רוצים לוודא שלמערכת יש פתרון (ולא משנה מהו):

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&2&a\\3&5&b\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-2R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&a\\0&-1&b-2a\end{array}\right)\xrightarrow{-R_2\to R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&a\\0&1&2a-b\end{array}\right)$$

למערכת הזו יש פתרון לכל $a+bx$ שנבחר, ולכן הקבוצה הנתונה פורשת.

בסך הכל, הקבוצה הנתונה היא בסיס.

$\square$

כעת נתחיל לעסוק בתכונות של בסיסים.

משפט 1.7. כל קבוצה בת"ל מוכלת בבסיס, וכל קבוצה פורשת מכילה בסיס.

יש חיזוק לטענה הזו:

משפט 1.8. תהי $S\subseteq V$ תת-קבוצה, ונסמן $n=\dim V$.

1. אם יש ב-S יותר מ-n איברים, S ת"ל (לכן, בסיס הוא קבוצה בת"ל מקסימלית).
2. אם יש ב-S פחות מ-n איברים, S אינה יכולה לפרוש את V (לכן, בסיס הוא קבוצה פורשת מינימלית).

תרגיל 1.9. הוכיחו שהקבוצה $\{1-3x,2-6x+x^2\}$ בת"ל ב-$\mathbb{R}_2\left[x\right]$, והשלימו אותה לבסיס של $\mathbb{R}_2\left[x\right]$.

פתרון. האלגוריתם: בשלב הראשון, שמים את הווקטורים בשורות מטריצה, ומדרגים לצורה מדורגת:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

עכשיו, מוסיפים וקטורים מתאימים כך שיהיו איברים מובילים בכל עמודה. פה רוצים להוסיף איבר מוביל לעמודה השנייה, ולכן נוסיף לקבוצה שלנו את האיבר x. לכן, $\{1-3x, 2-6x+x^2, x\}$ היא בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$.

תרגיל 1.10. מצאו בסיס לתת-המרחב $U = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, וחשבו את המימד שלו.

פתרון. האלגוריתם: שמים את הווקטורים בתחילה בעמודות, ומדרגים לצורה מדורגת:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1\to R_3]{R_2-2R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2\to R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו שבעמודה השלישית אין איבר מוביל, ולכן הווקטור השלישי תלוי באחרים. אם נוריד אותו, נקבל בסיס של U. לכן, $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ בסיס של U. מכאן ש-$\dim U = 2$.

כעת נראה קריטריון מאוד שימושי לקביעה האם קבוצה היא בסיס.

משפט 1.11 (משפט השלישי חינם)**.** תהי $B \subseteq V$ תת-קבוצה, $\dim V < \infty$. אם שניים מהבאים מתקיימים, אזי גם השלישי מתקיים, ואז B בסיס:

1. B בת"ל.
2. B פורשת.
3. $|B| = \dim V$.

מסקנה 1.12. יהי $U \leq V$ המקיים $\dim U = \dim V < \infty$. אזי $U = V$.

הוכחה. יהי B בסיס של U. B בת"ל, וכן $|B| = \dim U = \dim V$. לפי משפט השלישי חינם, B בסיס של V. לכן,

$$U = \text{Span}(B) = V$$

□

תרגיל 1.13. עבור מטריצה קבועה $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, נגדיר $V_B = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} | AB = -BA\}$. בתרגיל הראיתם כי זהו תת-מרחב וקטורי של $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
נתונות המטריצות $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ו-$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. מצאו בסיס ומימד לכל אחד מתתי-המרחבים הבאים: V_B, V_C, $V_B \cap V_C$ ו-$V_B + V_C$.

פתרון. נעבור על כל תת-מרחב בנפרד:

1. עבור V_B: נחפש את הצורה של איבר כללי ב-V_B. נניח $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V_B$; לכן

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2c & 2d \\ a & b \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} b & 2a \\ d & 2c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

נקבל את המשוואות $\begin{cases} 2c = -b \\ 2d = -2a \\ a = -d \\ b = -2c \end{cases}$; מכאן שבהכרח

$$V_B = \left\{ \begin{pmatrix} a & -2c \\ c & -a \end{pmatrix} \middle| a, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, c \in \mathbb{R} \right\}$$

לכן נובע ש-$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ פורשת את V_B, וקל לבדוק שהיא בת"ל. לכן, זה בסיס של V_B, ו-$\dim V_B = 2$.

2. עבור V_C: באופן דומה, מקבלים

$$V_C = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

וזהו בסיס, ולכן $\dim V_C = 2$.

3. עבור $V_B \cap V_C$: נשווה את האיברים הכלליים של תתי-המרחבים:

$$\begin{aligned} a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \alpha\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & -a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\alpha - \beta & \alpha \\ \beta & \alpha + \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ממערכת המשוואות מקבלים $\alpha = -2b$, $\beta = b$, ולכן $\alpha = -2\beta$. מכאן שהצורה הכללית היא

$$\begin{aligned} V_B \cap V_C &= \left\{ -2\beta\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \middle| \beta \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \beta & -2\beta \\ \beta & -\beta \end{pmatrix} \middle| \beta \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

4. עבור $V_B + V_C$: אנחנו יודעים כי $\text{Span}\left(S_1 \cup S_2\right) = \text{Span}\left(S_1\right) + \text{Span}\left(S_2\right)$, ולכן

$$\begin{aligned} V_B + V_C &= \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} + \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

מצאנו קבוצה פורשת; כדי למצוא בסיס, נשים בעמודות מטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2\leftrightarrow R_3]{R_4+R_1\to R_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3+2R_2\to R_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

לכן הווקטור האחרון מיותר, ונקבל ש-$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של V_B+V_C, כלומר $\dim\left(V_B+V_C\right)=3$.

הערה 1.14. שימו לב כי

$$\dim\left(V_B+V_C\right)=3=2+2-1=\dim V_B+\dim V_C-\dim\left(V_B\cap V_C\right)$$

ולא במקרה! זה משפט כללי יותר.