מטלה מס' 4 - פתרונות סופ״ים

① (א) נעזר במשפט קיום ויחידות.

$f(x,y)=\frac{y}{x}$ - היא פונק' רציפה בכל נק' (x_0,y_0) כאשר $x_0\neq 0$

ו- $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{x}$ - היא פונק' רציפה בכל נק' (x_0,y_0) כאשר $x_0\neq 0$

לכן לבעיה הנתונה קיים פתרון יחיד כאשר $x_0\neq 0$.

② נפתור את המשוואה:

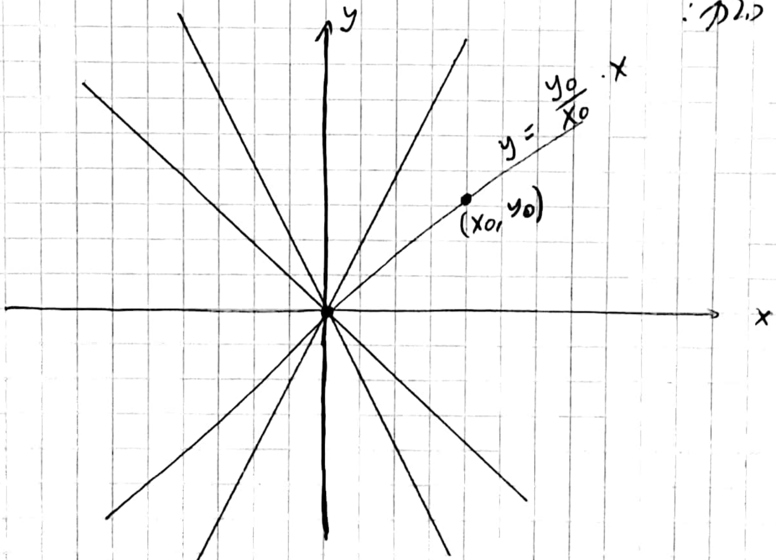
$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y|=\ln|x|+\ln C$$

פתרון כללי: $y=\tilde{C}\cdot x$

נתון בתנאי ההתחלה כי $y(x_0)=y_0$, לכן $\tilde{C}=\frac{y_0}{x_0}$ והפתרון הפרטי הוא:

$$\underline{y=\frac{y_0}{x_0}\cdot x}$$

נצייר את הגרף:



③ ניתן לראות מהגרף שכאשר $x_0\neq 0$ (תנאי משפט קיום ויחידות מתקיימים)
דרך כל נק' (x_0,y_0) עובר בדיוק פתרון אחד $(y=\frac{y_0}{x_0}\cdot x)$
כאשר $x_0\neq y$ ו $y_0=0$, הפתרון היחיד הזה הוא $y\equiv 0$
לעומת זאת, כאשר $x_0=0$ (תנאי משפט קיום ויחידות אינם מתקיימים) אז:

* אם $x_0=0, y_0\neq 0$ - אין אף פתרון שעובר דרך הנק' (x_0,y_0)

* אם $x_0=0, y_0=0$ (ראשית) - יש אינסוף פתרונות שעוברים דרך (0,0).

②

② א: $y_0(x)=0,\quad y_1(x)=\frac{x^2}{2},\quad y_2(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{20}$

ב: $y_0(x)=1,\quad y_1(x)=1+2x,\quad y_2(x)=\frac{1}{2}+x+x^2+\frac{1}{2}e^{2x}$

③ נעזר במשפט קיום ויחידות:

א. בכל נק' (x_0,y_0) עובר בדיוק פתרון אחד

ב. פתרון:

$f(x,y)=2+\sqrt[3]{y-2x}$ - רציפה בכל (x_0,y_0), אבל $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{3}(y-2x)^{-\frac{2}{3}}$

רציפה בכל נק' (x_0,y_0) רק כאשר $y_0\neq 2x_0$.

לכן, לפי המשפט, בכל נק' (x_0,y_0) כך ש $x_0\neq\frac{1}{2}y_0$ עובר בדיוק פתרון אחד.

ג. בכל נק' (x_0,y_0) כך ש: $y_0\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ עובר בדיוק פתרון אחד.

④ א. $y'=z(x)$,

$$y=\int\frac{x\,dx}{1-C_1x}+C_2$$

$$=\begin{cases}-\frac{1}{C_1}x-\frac{1}{C_1^2}\ln|C_1x-1|+C_2, & C_1\neq0 \text{ אם}\\ \frac{x^2}{2}+C_2, & C_1=0 \text{ אם}\end{cases}$$

ב. $$xy'''=y''-xy''$$

פתרון

זוהי משוואה "חסרה" כלומר y לא מופיע בצורה מפורשת במשוואה.

נסמן $y''=z(x) \Leftarrow xz'(x)=(1-x)z(x)$

$$\frac{dz}{z}=\left(\frac{1}{x}-1\right)dx \Rightarrow \ln|z|=\ln|x|-x+\ln C$$

$$z=C_1\cdot xe^{-x} \Rightarrow y''=C_1xe^{-x}$$

$$y'=\int C_1x\cdot e^{-x}dx=C_1\int xe^{-x}dx\overset{\text{בחלקים}}{=}C_1\cdot\left[-x\cdot e^{-x}+\int e^{-x}dx\right]$$

$$=-C_1xe^{-x}-C_1e^{-x}+C_2$$

$$y=\int(-C_1xe^{-x}-C_1e^{-x}+C_2)dx=C_1xe^{-x}+C_1e^{-x}-C_1$$
$$+C_1e^{-x}+C_2x+C_3$$

3

$$\Rightarrow y = C_1 e^{-x}(x+2) + C_2 x + \underbrace{C_3}_{C_3 - C_2 \;:\; \text{כאשר}}$$

$y \equiv 0$, $x = C_1 \ln|y| + y + C_2$, $y' = p(y)$ ג

ל"ת 4 5

פתרון: ב

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & \sin 2x \\ \cos x & -\sin x & 2\cos 2x \\ -\sin x & -\cos x & -4\sin 2x \end{vmatrix} = 4\sin^2 x \cdot \sin 2x - \cos^2 x \sin 2x$$

$$-\underline{2\sin x \cos x \cos 2x} - \left(\sin^2 x \sin 2x - 4\sin 2x \cos^2 x - \underline{2\cos 2x \sin x \cos x}\right)$$

$$= 3\sin^2 x \cdot \sin 2x + 3\cos^2 x \sin 2x = 3\sin 2x \neq 0$$

סין ל"ת.

ג ל"ת.