בוחן אינפי 2 – 01.06.21

משקל כל שאלה 38 נקודות

יש לענות על כל השאלות

כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. חשבו את שני האינטגרלים הבאים

$$\int \frac{2x^2+2x+2}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx$$

אינטגרל על פונקציה רציונאלית, דרגת המונה קטנה מדרגת המכנה אז צריך לפרק לשברים חלקיים, ולצורך זה צריך לפרק את המכנה לגורמים האי פריקים שלו.

$$\frac{2x^2+2x+2}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{2x^2+2x+2}{x^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

עושים מכנה משותף, משווים מונים ומגלים ש

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2+2x+2}$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx=-\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx=\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx=\arctan(x+1)$$

סה"כ

$$\int \frac{2x^2+2x+2}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx=-\frac{1}{x}+\arctan(x+1)+C$$

$$\int \left(e^x \ln(x) + \frac{e^x}{x}\right)dx$$

(רמז: $t = e^x \ln(x)$)

$$\int \left(e^x \ln(x) + \frac{e^x}{x}\right)dx = \left\{\begin{matrix} t = e^x \ln(x) \\ dt = \left(e^x \ln(x) + e^x \cdot \frac{1}{x}\right)dx \end{matrix}\right\} = \int 1 \cdot dt = t + C = e^x \ln(x) + C$$

2. חשבו את גבולות הסדרות הבאות

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 \to \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

זה נכון לפי "משפט מאד שימושי" כיוון שx^2 רציפה בקטע $[0,1]$

$$b_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2}\right) \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^3}}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2}\right) \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^3}} = \{WIN\} = \left(\sum_{k=1}^{n} n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{k^2}{n^2}\right) \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{k^3}{n^3}} = \frac{n}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{k^2}{n^2}\right) \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{k^3}{n^3}}$$

שימו לב שהיה מותר להוציא את n מהסכימה כי הוא לא האינדקס של הסכימה.

ואז באופן דומה לסעיף קודם מקבלים שהגבול הוא

$$\frac{\int_0^1 x^2 dx}{\int_0^1 x^3 dx} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

3. תהי f פונקציה המוגדרת וחסומה בקטע $[a,b]$ כאשר $a,b \in \mathbb{R}$.

א. הוכיחו או הפריכו: אם קיימות סדרות $a_n, b_n \in [a,b]$ כך ש $a_n - b_n \to 0$ אבל $f(a_n) - f(b_n) \to 1$

אזי f <u>אינה</u> אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

קל לבנות סדרות כמו בנתוני הסעיף (זה לא היה מתקבל במבחן) אבל למדנו שהפונקציה הזו אינטגרבילית כי היא חסומה ורציפה פרט לנקודה אחת. (הפרכה)

או מדרגה.

ב. הוכיחו או הפריכו: אם לכל זוג סדרות $a_n, b_n \in [a,b]$ כך ש $a_n - b_n \to 0$ מתקיים כי $f(a_n) - f(b_n) \to 0$

אזי f <u>כן</u> אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

קל להוכיח שמהנתונים נובע של f רציפה ב$[a,b]$ ולכן לפי משפט אינטגרבילית בקטע. (הוכחה)

בהצלחה!