89-198 מתמטיקה בדידה – תרגול 6

יחסים

יחסי סדר

הגדרה: תהי A קבוצה, יחס R על A נקרא יחס סדר חלקי אם הוא רפלקסיבי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי.
הזוג הסדור (A,R) נקרא קבוצה סדורה חלקית (קס"ח).
(לפעמים מסמנים $(A,\leq)$ - שימו לב שהכוונה לא ליחס "קטן או שווה" אלא ליחס סדר חלקי כלשהוא.)
הגדרה: תהי A קבוצה, יחס סדר חלקי R על A נקרא יחס סדר מלא (או יחס סדר לינארי)
אם לכל $a,b\in A$ מתקיים $(a,b)\in R$ או $(b,a)\in R$. הזוג הסדור (A,R) נקרא קבוצה סדורה לינארית.

הגדרה: תהי (A,R) קבוצה סדורה חלקית, תהי $B\subseteq A$ ויהי $b\in B$.
b נקרא אבר קטן ביותר ב B אם $\forall x\in B:(b,x)\in R$.
b נקרא אבר גדול ביותר ב B אם $\forall x\in B:(x,b)\in R$.
b נקרא R-מינימלי אם $\neg\exists x\in B(x\neq b\wedge(x,b)\in R)$, כלומר $\forall x\in B\big((x,b)\in R\Rightarrow x=b\big)$.
b נקרא R-מקסימלי אם $\neg\exists x\in B(x\neq b\wedge(b,x)\in R)$, כלומר $\forall x\in B\big((b,x)\in R\Rightarrow x=b\big)$.

דוגמה: $A=\{1,2,3\}$, $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(1,3)\}$. זהו יחס סדר חלקי על A.
1 האבר הקטן ביותר והאבר המינימלי של A. 2 ו 3 אברים מקסימלים, אין אבר גדול ביותר.
דוגמה: היחס "קטן או שווה" על $\mathbb{Z}$, $\{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\mid\exists k\in\mathbb{N}:b=a+k\}$ הוא יחס סדר מלא.

- רפלקסיבי - לכל $a\in\mathbb{Z}$ מתקיים $a=a+0$, ומכיון ש $0\in\mathbb{N}$ נובע $a\leq a$.
- אנטי-סימטרי – יהיו $a,b\in\mathbb{Z}$, ונניח ש $a\leq b\wedge b\leq a$.
  כלומר קיימים $k_1,k_2\in\mathbb{N}$ כך ש $a=b+k_1$ ו $b=a+k_2$.
  נקבל ש $b=(b+k_1)+k_2=b+(k_1+k_2)$, ולכן $k_1+k_2=0$.
  מכיון ש $k_1,k_2\in\mathbb{N}$ נובע ש $k_1=k_2=0$ ונקבל $a=b$.
- טרנזיטיבי - יהיו $a,b\in\mathbb{Z}$, ונניח ש $a\leq b\wedge b\leq c$.
  כלומר קיימים $k_1,k_2\in\mathbb{N}$ כך ש $c=b+k_1$ ו $b=a+k_2$.
  נקבל ש $c=(a+k_2)+k_1=a+(k_1+k_2)$. מכיון ש $k_1+k_2\in\mathbb{N}$ נובע ש $a\leq c$.
- יחס סדר מלא - לכל $a,b\in\mathbb{Z}$ מתקיים $a\leq b\vee b\leq a$.

לא קיימים אבר מינימלי ואבר מקסימלי עבור יחס זה.
עבור $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$, 0 הוא אבר מינימלי, כי לא קיים $x\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ כך ש $x\leq 0$.
0 הוא אבר קטן ביותר, כי לכל $x\in\mathbb{N}$ מתקיים $0\leq x$.

תרגיל: נסתכל על היחס "מחלק את" על $\mathbb{N}$. האם הוא יחס סדר חלקי? יחס סדר מלא?
מהו האבר הקטן ביותר והאברים המינימלים של $A=\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$?
<u>הוכחה</u>:

- רפלקסיביות: לכל $a\in\mathbb{N}$ מתקיים $a=a\cdot 1$, ומכיון ש $1\in\mathbb{N}$ נובע $a\mid a$.
- אנטי-סימטריות: יהיו $a,b\in\mathbb{N}$ ונניח ש $a\mid b\wedge b\mid a$.
  מכיון ש $a\mid b$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש $b=a\cdot n$. מכיון ש $b\mid a$ קיים $m\in\mathbb{N}$ כך ש $a=b\cdot m$.
  כעת $a=b\cdot m=a\cdot nm$. לכן $nm=1$, ומכיוון ש $n,m\in\mathbb{N}$ בהכרח $n=m=1$, כלומר $a=b$.
- טרנזיטיביות: יהיו $a,b,c\in\mathbb{N}$ ונניח ש $a\mid b\wedge b\mid c$.
  מכיון ש $a\mid b$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש $b=a\cdot n$. מכיון ש $b\mid c$ קיים $m\in\mathbb{N}$ כך ש $c=b\cdot m$.
  כעת $c=b\cdot m=a\cdot nm$, ו $nm\in\mathbb{N}$, לכן $a\mid c$.

היחס אינו יחס סדר מלא מכיוון שלא כל שני אברים ניתנים להשוואה, למשל $(3,2), (2,3)$ לא נמצאים ביחס.
כל מספר ראשוני $p \in A$ הוא אבר מינימלי, כי לא קיים $x \in A \setminus \{p\}$ כך ש $x \mid p$.
לא קיים אבר קטן ביותר ב A.

<u>תרגיל</u>: האם היחס "מחלק את" על $\mathbb{Z}$ הוא יחס סדר חלקי?
לא, היחס אינו אנטי-סימטרי כי עבור $1, -1 \in \mathbb{Z}$ מתקיים $-1 \mid 1$ ובנוסף $1 \mid -1$, אולם $-1 \neq 1$.

<u>תרגיל</u>: תהי (A, R) קבוצה סדורה חלקית.
1) הוכח ש R^{-1} יחס סדר חלקי על A.
2) הוכח ש $b \in A$ אבר R-מקסימלי של A אם ורק אם b אבר R^{-1}-מינימלי של A.

<u>הוכחה</u>:
1) נוכיח ש R^{-1} יחס סדר חלקי על A.
   a. רפלקסיביות: יהי $a \in A$, מכיוון ש R רפלקסיבי $(a,a) \in R$. מהגדרת יחס הפוך $(a,a) \in R^{-1}$.
   b. אנטי-סימטריות: יהיו $a, b \in A$ ונניח ש $(a,b), (b,a) \in R^{-1}$.
   מהגדרת יחס הפוך $(b,a), (a,b) \in R$. מכיוון ש R אנטי-סימטרי $a = b$.
   c. טרנזיטיביות: יהיו $a, b, c \in A$ ונניח ש $(a,b), (b,c) \in R^{-1}$.
   מהגדרת יחס הפוך $(b,a), (c,b) \in R$. מכיוון ש R טרנזיטיבי $(c,a) \in R$, ולכן $(a,c) \in R^{-1}$.
2) b אבר R-מקסימלי של A $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \neg\exists a \in A(a \neq b \wedge (b,a) \in R)$
$\Leftrightarrow \neg\exists a \in A(a \neq b \wedge (a,b) \in R^{-1})$
b אבר R^{-1}-מינימלי של A.

<u>משפט מההרצאה</u>: תהי (A, R) קבוצה סדורה חלקית ותהי $B \subseteq A$ אזי:
1) אם קיים ב B אבר קטן ביותר אזי הוא יחיד.
2) אם $b \in B$ הוא האבר הקטן ביותר ב B, אזי הוא אבר מינימלי של B, והוא האבר המינימלי היחיד.

ננתח את הוכחת המשפט.
<u>רעיון ההוכחה</u>:
1) הוכחה זו שונה קצת מהוכחת קיום ויחידות, כאן מניחים קיום ומוכיחים יחידות.
נסמן ב $S(b)$ את הפרדיקט $\forall x \in B: (b,x) \in R$.

נתונים	מטרה
$\exists b \in B: S(b)$	$\exists! b \in B: S(b)$

נשתמש באסטרטגיה 20, אך מכיוון שמניחים קיום נוכיח רק יחידות.

נתונים	מטרה
$\exists b \in B: S(b)$	$\forall b \in B \forall c \in B \left(\left(S(b) \wedge S(c)\right) \Rightarrow b = c\right)$

בעזרת אסטרטגיה 8 נבחר $b, c \in B$ שרירותיים, ובעזרת אסטרטגיה 1 נניח $S(b) \wedge S(c)$.

נתונים	מטרה
$b, c \in B$ $\forall x \in B: (b,x) \in R$ $\forall x \in B: (c,x) \in R$	$b = c$

בעזרת US אנחנו יכולים להסיק 4 טענות חדשות:
$(b,b)\in R, (c,c)\in R$ – זה לא מוסיף מידע חדש כי R רפלקסיבי.
$(b,c)\in R, (c,b)\in R$ – טענות אלו עוזרות כי R אנטי סימטרי, לכן $b=c$.

<u>הוכחה</u>: יהיו $b,c\in B$. נניח ש b,c אברים קטנים ביותר של B ונוכיח ש $b=c$.
מכיון ש b אבר קטן ביותר של B נובע $\forall x\in B{:}\,(b,x)\in R$, בפרט עבור $c\in B$ נקבל $(b,c)\in R$.
מכיון ש c אבר קטן ביותר של B נובע $\forall x\in B{:}\,(c,x)\in R$, בפרט עבור $b\in B$ נקבל $(c,b)\in R$.
מכיון ש R אנטי סימטרי נקבל ש $b=c$.

2) נניח ש $b\in B$ הוא האבר הקטן ביותר ב B, נוכיח ש b אבר מינימלי של B.

נתונים	מטרה
$b\in B$ $\forall x\in B{:}\,(b,x)\in R$	$\neg\exists x\in B(x\neq b\wedge(x,b)\in R)$

לפי אסטרטגיה 3 ננסח מחדש את המטרה

$$\neg\exists x\in B(x\neq b\wedge(x,b)\in R)\equiv\forall x\in B(x=b\vee(x,b)\notin R)\equiv\forall x\in B\big((x,b)\in R\Rightarrow x=b\big)$$

נתונים	מטרה
$b\in B$ $\forall x\in B{:}\,(b,x)\in R$	$\forall x\in B\big((x,b)\in R\Rightarrow x=b\big)$

בעזרת אסטרטגיה 8 נבחר $c\in B$ שרירותי ונניח $(c,b)\in R\Rightarrow c=b$
בעזרת אסטרטגיה 1 נניח $(c,b)\in R$ ונוכיח $c=b$.

נתונים	מטרה
$b,c\in B$ $\forall x\in B{:}\,(b,x)\in R$ $(c,b)\in R$	$c=b$

מ US נקבל ש $(b,c)\in R$ ובנוסף $(c,b)\in R$ ולכן מהאנטיסימטריות של R נקבל ש $c=b$.

כעת נוכיח יחידות. נוכיח שאם $c\in B$ הוא אבר מינימלי של B אזי $c=b$.
נסמן ב $M(c)$ את הפרדיקט $\neg\exists x\in B(x\neq c\wedge(x,c)\in R)$.

נתונים	מטרה
$b\in B$ $\forall x\in B{:}\,(b,x)\in R$	$\forall c\in B(M(c)\Rightarrow b=c)$

בעזרת אסטרטגיה 8 נבחר $c\in B$ שרירותי, ובעזרת אסטרטגיה 1 נניח $M(c)$.

נתונים	מטרה
$b,c\in B$ $\forall x\in B{:}\,(b,x)\in R$ $\neg\exists x\in B(x\neq c\wedge(x,c)\in R)$	$b=c$

נייצג את ההנחה בצורה שונה

$$\neg\exists x\in B(x\neq c\wedge(x,c)\in R)\equiv\forall x\in B(x=c\vee(x,c)\notin R)\equiv\forall x\in B\big((x,c)\in R\Rightarrow x=c\big)$$

נתונים	מטרה
$b,c\in B$ $\forall x\in B{:}\,(b,x)\in R$ $\forall x\in B\big((x,c)\in R\Rightarrow x=c\big)$	$b=c$

כעת מכיון ש b אבר קטן ביותר ו $c\in B$, נקבל ש $(b,c)\in R$, ולכן $b=c$.

הוכחה: יהי $b \in B$ האבר הקטן ביותר של B, נוכיח שהוא מינימלי, כלומר $\forall x \in B\big((x,b) \in R \Rightarrow x = b\big)$.
יהי $c \in B$, ונניח ש $(c,b) \in R$.
מכיון ש b האבר הקטן ביותר של B, בפרט נובע $(b,c) \in R$.
מכיון ש $(c,b),(b,c) \in R$ נקבל מהאנטיסימטריות של R ש $b = c$.

כעת נניח ש $c \in B$ אבר מינימלי של B, ונוכיח ש $b = c$.
$c \in B$ אבר מינימלי של B ולכן $\forall x \in B\big((x,c) \in R \Rightarrow x = c\big)$, ובפרט $(b,c) \in R \Rightarrow b = c$.
מכיון ש b האבר הקטן ביותר של B, נקבל ש $(b,c) \in R$.
כעת ממודוס פוננס נקבל ש $b = c$.

סגור של יחס

הגדרה: תהי A קבוצה ויהי R יחס על A.
$S \subseteq A \times A$ הוא הסגור הרפלקסיבי של R (בהתאמה סגור סימטרי / סגור טרנזיטיבי) אם מתקיימים התנאים הבאים:
1) $R \subseteq S$.
2) S רפלקסיבי (בהתאמה סימטרי / טרנזיטיבי).
3) לכל יחס $T \subseteq A \times A$, אם $R \subseteq T$ ו T רפלקסיבי (בהתאמה סימטרי / טרנזיטיבי) אזי $S \subseteq T$.

משפט: תהי A קבוצה ויהי R יחס על A. אזי קיימים ל R סגור רפלקסיבי, סגור סימטרי וסגור טרנזיטיבי,

דוגמה: $A = \{1,2,3,4\}$ ו $R = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$.
הסגור הרפלקסיבי של R הוא $S_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,3),(3,4)\}$.
הסגור הסימטרי של R הוא $S_2 = \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3)\}$.
הסגור הטרנזיטיבי של R הוא $S_3 = \{(1,2),(2,3),(3,4),(1,3),(2,4),(1,4)\}$.

תרגיל: תהי A קבוצה ויהיו R_1, R_2 יחסים על A המקיימים $R_1 \subseteq R_2$. הוכח את הטענות הבאות:
1) אם S_1, S_2 הסגורים הרפלקסיבים של R_1, R_2 (בהתאמה) אזי $S_1 \subseteq S_2$.
2) אם S_1, S_2 הסגורים הסימטרים של R_1, R_2 (בהתאמה) אזי $S_1 \subseteq S_2$.

פתרון:
1) נניח ש S_1, S_2 הסגורים הרפלקסיבים של R_1, R_2 (בהתאמה).
יהיו $a, b \in A$, נניח ש $(a,b) \in S_1$ ונוכיח $(a,b) \in S_2$.
אם $(a,b) \in R_1$ אזי מכיון ש $R_1 \subseteq R_2$ ובנוסף $R_2 \subseteq S_2$ נקבל ש $(a,b) \in S_2$.
אם $(a,b) \notin R_1$, נקבל ש $a = b$, (מכיון ש $S_1 \setminus R_1 \subseteq i_A$ – להוכיח בבית),
ומכיון ש S_2 רפלקסיבי נקבל ש $(a,b) \in S_2$.
2) נניח ש S_1, S_2 הסגורים הסימטרים של R_1, R_2 (בהתאמה).
יהיו $a, b \in A$, נניח ש $(a,b) \in S_1$ ונוכיח $(a,b) \in S_2$.
אם $(a,b) \in R_1$ אזי מכיון ש $R_1 \subseteq R_2$ ובנוסף $R_2 \subseteq S_2$ נקבל ש $(a,b) \in S_2$.
אם $(a,b) \notin R_1$ נוכיח ש $(b,a) \in R_1$.
נניח בשלילה ש $(b,a) \notin R_1$ ונגדיר את היחס $T = S_1 \setminus \{(a,b),(b,a)\}$. נוכיח ש T סימטרי.
יהי $(x,y) \in A \times A \setminus \{(a,b),(b,a)\}$ ונניח ש $(x,y) \in T$. מכיון ש $T \subseteq S_1$ נובע ש $(x,y) \in S_1$.
מכיון ש S_1 סימטרי, $(y,x) \in S_1$. בנוסף $(y,x) \notin \{(a,b),(b,a)\}$ ולכן $(y,x) \in T$.
נקבל ש $R_1 \subseteq T$, T סימטרי אך $S \nsubseteq T$.
זו סתירה להנחה ש S_1 הסגור הסימטרי של R_1, ולכן $(b,a) \in R_1$.
כעת, מכיון ש $R_1 \subseteq R_2$ ובנוסף $R_2 \subseteq S_2$ נקבל ש $(b,a) \in S_2$ ומכיון ש S_2 סימטרי נקבל ש $(a,b) \in S_2$.

יחס שקילות

הגדרה: תהי A קבוצה, יחס R על A נקרא יחס שקילות אם הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

לכל $a \in A$ נגדיר את מחלקת השקילות של a להיות $[a]_R = \{b \in A \mid (a,b) \in R\}$.

אבר $b \in [a]_R$ נקרא נציג של מחלקת השקילות.

קבוצת המנה של A ביחס ל R היא קבוצת מחלקות השקילות $A / R = \{[a]_R \mid a \in A\}$.

דוגמה: נגדיר את היחס $R = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | \exists n \in \mathbb{Z}: a + b = 2n\}$.
נראה ש R יחס שקילות:

- רפלקסיביות: לכל $a \in \mathbb{Z}$ מתקיים $a + a = 2a$ כלומר $n = a$, ולכן $(a,a) \in R$.
- סימטריות: יהיו $a,b \in \mathbb{Z}$ ונניח ש $(a,b) \in R$.
  אזי קיים $n \in \mathbb{Z}$ כך ש $a + b = 2n$, ולכן גם $b + a = 2n$, כלומר $(b,a) \in R$.
- טרנזיטיביות: יהיו $a,b,c \in \mathbb{Z}$ ונניח ש $(a,b),(b,c) \in R$.
  מכיון ש $(a,b) \in R$ קיים $n \in \mathbb{Z}$ כך ש $a + b = 2n$, כלומר $a = 2n - b$.
  מכיון ש $(b,c) \in R$ קיים $m \in \mathbb{Z}$ כך ש $b + c = 2m$, כלומר $c = 2m - b$.
  כעת $a + c = (2n - b) + (2m - b) = 2(n + m - b)$, כלומר $(a,c) \in R$.

מחלקת השקילות של 0 היא $[0]_R = \{b \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{Z}: 0 + b = 2n\} = \{b \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{Z}: b = 2n\}$.
אלו הם המספרים הזוגיים. 4 הוא דוגמה לנציג של $[0]_R$.
מחלקת השקילות של 1 היא $[1]_R = \{b \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{Z}: 1 + b = 2n\} = \{b \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{Z}: b = 2n - 1\}$.
אלו הם המספרים האי-זוגיים. 3 הוא דוגמה לנציג של $[1]_R$.

קבוצת המנה של $\mathbb{Z}$ ביחס ל R היא $\mathbb{Z} / R = \{[1]_R, [0]_R\}$.

סימון: יהיו $a,b \in \mathbb{Z}$ ו $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, אם $n \mid (a - b)$ נסמן $a \equiv b \ (mod\ n)$.
דוגמה: נגדיר את היחס $R = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \equiv b (mod\ 5)\}$.
נראה ש R יחס שקילות:

- רפלקסיביות: יהי $a \in \mathbb{Z}$, אזי $a - a = 0 = 0 \cdot 5$ כלומר $a \equiv a (mod\ 5)$, ולכן $(a,a) \in R$.
- סימטריות: יהיו $a,b \in \mathbb{Z}$ ונניח ש $(a,b) \in R$, כלומר $a \equiv b (mod\ 5)$.
  אזי קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש $a - b = 5k$, ולכן גם $b - a = 5(-k)$, ובנוסף $-k \in \mathbb{Z}$, לכן $(b,a) \in R$.
- טרנזיטיביות: יהיו $a,b,c \in \mathbb{Z}$ ונניח ש $(a,b),(b,c) \in R$.
  מכיון ש $(a,b) \in R$ קיים $k_1 \in \mathbb{Z}$ כך ש $a - b = 5k_1$.
  מכיון ש $(b,c) \in R$ קיים $k_2 \in \mathbb{Z}$ כך ש $b - c = 5k_2$.
  כעת $a - c = 5(k_1 + k_2)$, ובנוסף $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$, ולכן $(a,c) \in R$.

מחלקת השקילות של 0 היא

$$[0]_R = \{b \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}: b - 0 = 5k\} = \{b \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}: b = 5k\} = \{0, \pm 5, \pm 10, \dots\}$$

אלו הם המספרים שמתחלקים ב 5 ללא שארית. 15 הוא דוגמה לנציג של $[0]_R$.
מחלקת השקילות של 1 היא

$$[1]_R = \{b \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}: b - 1 = 5k\} = \{b \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}: b = 5k + 1\} = \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$$

קבוצת המנה של $\mathbb{Z}$ ביחס ל R היא $\mathbb{Z} / R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R, [3]_R, [4]_R\}$.
הגדרה: תהי $A \neq \emptyset$ קבוצה. משפחה של קבוצות $\mathcal{F}$ היא חלוקה של A אם:
1) לכל $X \in \mathcal{F}$, $X \neq \emptyset$.
2) הקבוצות ב $\mathcal{F}$ זרות בזוגות, כלומר לכל $X,Y \in \mathcal{F}$ אם $X \neq Y$ אזי $X \cap Y = \emptyset$.
3) הקבוצות ב $\mathcal{F}$ מכסות את A, כלומר $\cup \mathcal{F} = A$.

דוגמה: תהי $A = \{1,2,3,4\}$, ונגדיר $\mathcal{F} = \big\{\{1\},\{2,3\},\{4\}\big\}$. אזי $\mathcal{F}$ חלוקה של A.

משפט: תהי $A \neq \emptyset$ קבוצה, ויהי R יחס שקילות על A. אזי A / R היא חלוקה של A.

דוגמה: בדוגמה הראשונה, $\mathbb{Z} / R$ היא חלוקה של $\mathbb{Z}$.

1) לכל $[x]_R \in \mathbb{Z} / R$ מתקיים $x \in [x]_R$, ולכן $[x]_R \neq \emptyset$.
2) מתקיים $[0]_R \cap [1]_R = \emptyset$.
3) מתקיים $\mathbb{Z} = [0]_R \cup [1]_R$.

משפט: תהי $A \neq \emptyset$ קבוצה, ותהי $\mathcal{F}$ חלוקה של A. אזי קיים יחס שקילות R על A כך ש $A / R = \mathcal{F}$.

דוגמה: עבור $A = \{1,2,3,4\}$, ו $\mathcal{F} = \{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$ נגדיר $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(2,3),(3,2)\}$.

אזי $[1]_R = \{1\}, [2]_R = \{2,3\} = [3]_R, [4]_R = \{4\}$ ולכן $A/R = \mathcal{F}$.

תרגיל: תהי $\mathcal{F}$ חלוקה של A ותהי $\mathcal{G}$ חלוקה של B. נניח ש $A \cap B = \emptyset$. הוכח ש $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ חלוקה של $A \cup B$.

הוכחה:

1) תהי $X \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ אזי $X \in \mathcal{F} \vee X \in \mathcal{G}$, ובשני המקרים $X \neq \emptyset$.
2) תהיינה $X, Y \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ קבוצות שונות.

   אם $X, Y \in \mathcal{F}$ אזי $X \cap Y = \emptyset$. אם $X, Y \in \mathcal{G}$ אזי $X \cap Y = \emptyset$.

   אחרת נניח ש $X \in \mathcal{F}$ ו $Y \in \mathcal{G}$. נניח בשלילה ש $X \cap Y \neq \emptyset$, כלומר קיים $x_0 \in X \cap Y$.

   מצד אחד $x_0 \in X$ ולכן $x_0 \in A$, ומצד שני $x_0 \in Y$ ולכן $x_0 \in B$. זו סתירה ל $A \cap B = \emptyset$.
3) יהי $x \in A \cup B$.

   אם $x \in A$ אזי קיימת $X \in \mathcal{F}$ כך ש $x \in X$. מכיון ש $X \in \mathcal{F}$ נובע $X \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ ונקבל $x \in \cup (\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$.

   אם $x \in B$ אזי קיימת $X \in \mathcal{G}$ כך ש $x \in X$. מכיון ש $X \in \mathcal{G}$ נובע $X \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ ונקבל $x \in \cup (\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$.

   כלומר $A \cup B \subseteq \cup (\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$.

   כעת יהי $x \in \cup (\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$, כלומר קיימת $X \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ כך ש $x \in X$.

   אם $X \in \mathcal{F}$ אזי $x \in \cup \mathcal{F} = A$ ואם $X \in \mathcal{G}$ אזי $x \in \cup \mathcal{G} = B$, לכן $x \in A \cup B$, כלומר $\cup (\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) \subseteq A \cup B$.

   ביחד נקבל ש $\cup (\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = A \cup B$.

תרגיל: תהי A קבוצה, יהי R יחס שקילות על A, ותהי $B \subseteq A$. נגדיר $S = R \cap (B \times B)$.

1) הוכח ש S יחס שקילות על B.
2) הוכח שלכל $x \in B$ מתקיים $[x]_S = [x]_R \cap B$.

הוכחה:

1) נוכיח ש S יחס שקילות על B:
   - רפלקסיביות: יהי $a \in B$.
     $B \subseteq A$ ולכן $a \in A$. R יחס שקילות על A ובפרט רפלקסיבי, ולכן $(a,a) \in R$.
     מצד שני $(a,a) \in B \times B$ ולכן $(a,a) \in S$.
   - סימטריות: יהיו $a, b \in B$ ונניח ש $(a,b) \in S$.
     מהגדרת S נובע בפרט ש $(a,b) \in R$, ומהסימטריות של R נובע $(b,a) \in R$.
     מצד שני $a, b \in B$ ולכן $(b,a) \in B \times B$. נקבל ש $(b,a) \in S$.
   - טרנזיטיביות: יהיו $a, b, c \in B$ ונניח ש $(a,b) \in S$ וגם $(b,c) \in S$.
     מהגדרת S נובע בפרט ש $(a,b) \in R$, ו $(b,c) \in R$, ומהטרנזיטיביות של R נובע $(a,c) \in R$.
     מצד שני $a, c \in B$ ולכן $(a,c) \in B \times B$. נקבל ש $(a,c) \in S$.

2) יהי $x \in B$.

נוכיח שלכל $y \in A$ מתקיים $y \in [x]_R \cap B \Leftrightarrow y \in [x]_S$.

יהי $y \in A$.

($\Rightarrow$) נניח ש $y \in [x]_S$ ונוכיח ש $y \in [x]_R \cap B$.

מכיון ש $y \in [x]_S$ נובע ש $y \in B$ וגם $(x, y) \in S$.

כלומר $(x, y) \in R \cap (B \times B)$ ובפרט $(x, y) \in R$.

כעת $(x, y) \in R$ ולכן $y \in [x]_R$ ובנוסף ראינו ש $y \in B$, ונקבל ש $y \in [x]_R \cap B$.

($\Leftarrow$) נניח ש $y \in [x]_R \cap B$ ונוכיח ש $y \in [x]_S$.

מכיון ש $y \in [x]_R \cap B$ נובע ש $y \in [x]_R$ וגם $y \in B$.

מצד אחד, $y \in [x]_R$ ולכן $(x, y) \in R$.

מצד שני, $y \in B$ ובנוסף $x \in B$ ולכן $(x, y) \in B \times B$.

נקבל ש $(x, y) \in R \cap (B \times B)$ ולכן $(x, y) \in S$.

מכיון ש $y \in B$ ו $(x, y) \in S$ נובע ש $y \in [x]_S$.