1. הגדרה: יהי (X,d) מ"מ ו $A \subseteq X$. נקודת הצטברות של A היא נקודה x שקיימת סדרה ב $A \setminus \{x\}$ ששואפת אליה. בנוסף, מסמנים בA' את האוסף של כל נקודות ההצטברות. A' = נקודות הצטברות = $\{x : x \in scl(A \setminus \{x\}\}$. נקודה ב$A$ שאינה נקודת הצטברות של A נקראת נקודה מבודדת.

2. הגדרות שקולות לנקודת הצטברות. x היא נקודת הצטברות של A אם היא מקיימת את אחת מבין התנאים השקולים הבאים:
   (א) קיימת סדרה לא קבועה לבסוף $A \subseteq (a_n)$ ששואפת לx.
   (ב) קיימת סדרה שכל איבריה שונים $A \subseteq (a_n)$ ששואפת לx.
   (ג) לכל $\epsilon > 0$, $(A \setminus \{x\}) \cap B(x,\epsilon) \neq \emptyset$
   (ד) לכל $\epsilon > 0$, קיים $A \ni a \neq x$ כך ש$d(x,a) < \epsilon$.

3. דוגמא: $A = (0,1) \cup \{2\}$ בתוך $\mathbb{R}$ עם המטריקה האוקלידית.
   (א) נקודות הצטברות: $[0,1]$. (שימו לב שאין הכלה בשום כיוון בין A לA')
   (ב) נקודה מבודדת: 2.

4. טענה: A סגורה אמ"ם $A' \subseteq A$.

5. תרגיל: הוכיחו שלכל קבוצה A, A' סגורה.
פתרון: לפי טענה 4, בשביל להוכיח שA' סגורה, מספיק להוכיח ש$A'' \subseteq A'$.
יהי $x \in A''$. אנחנו רוצים להוכיח ש$x \in A'$. כלומר, יהי $2\epsilon > 0$. המטרה היא למצוא $A \ni a \neq x$ כך ש$d(x,a) < 2\epsilon$. עבור ϵ ידוע שקיים $A' \ni y \neq x$ כך ש$d(y,x) < \epsilon$. (מכיוון ש$x \in (A')'$). מכיוון ש$y \in A'$ קיים איזשהו $A \ni a \neq y$ כך ש$d(a,y) < \epsilon$. מאי"ש המשולש

$$d(x,a) < 2\epsilon$$

שימו לב: לא ניתן להסיק ש$a \neq x$.
איך נתקן? אחרי שבחרנו את y. כעת נבחר נקודה ב$A \ni a$ שהמרחק שלה מy קטן מ$d(y,x) < \epsilon$. כעת ניתם להסיק ש$a \neq x$, כי $d(a,y) < d(y,x)$.

6. קומפקטיות: יהי (X,d) מרחב מטרי. תת קבוצה $A \subseteq X$ נקראת "קומפקטית" אם לכל כיסוי פתוח של A יש תת כיסוי סופי. כלומר, אם $A \subseteq \bigcup O_i$, אז יש מספר סופי של קבוצות $O_{i_1}, ..., O_{i_n}$ כך ש $A \subseteq O_{i_1} \cup ... \cup O_{i_n}$.

7. משפט: ב$\mathbb{R}^n$ קבוצה היא קומפקטית אמ"ם היא סגורה וחסומה.

8. במרחב מטרי כללי המשפט לא נכון. קבוצה סגורה וחסומה היא לא בהכרח קומפקטית.
לדוגמא: נקח קבוצה אינסופית X עם מטריקת $1-0$. ונקח $A = X$. סגור- כי זה כל המרחב. חסום- כי זה מוכל ב$B(x, r+1)$ עבור איזשהו $x \in X$. ולא קומפקטי- ניתן לכסות את המרחב ע"י האוסף של כל הנקודונים. זה אוסף של קבוצות פתוחות. ושום תת אוסף סופי לא יהווה כיסוי.

מרחבים טופולוגיים

הגדרה: תהי X קבוצה. טופולוגיה על X היא τ- אוסף של תתי קבוצות של X שמקיימים 3 תכונות:

1. $\emptyset, X \in \tau$
2. סגירות לאיחודים כלשהם.
3. סגירות לחיתוכים סופיים.

דוגמאות:
1. על כל קבוצה X קיימת הטופולוגיה הדיסקרטית $\tau = P(X)$.
2. על כל קבוצה Xקיימת הטופולוגיה הטריוויאלית, $\tau = \{\emptyset, X\}$
3. כל מרחב מטרי יוצר טופולוגיה ע"י זה שנקח את τ להיות האוסף של הקבוצות שפתוחות לפי המטריקה.

הגדרה: בהינתן (X, τ) מרחב טופולוגי, הקבוצות ששייכות לτ נקראות "קבוצות פתוחות", והקבוצות שהמשלים שלהן פתוח, נקראת קבוצות סגורות. קבוצות שהן גם פתוחות וגם סגורות נקראות סגוחות. למשל, בטופולוגיה הטריוויאלית, הקבוצות הפתוחות והסגורות היחידות הן X ו$\emptyset$.

באופן כללי, בכל מרחב טופולוגי, X ו$\emptyset$ הן סגוחות.

בטופולוגיה הדיסקרטית כל קבוצה פתוחה וכל קבוצה סגורה ולכן כל קבוצה סגוחה.

דוגמא נוספת: $X = \{a, b\}$ ו$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$. זה נקרא "מרחב שרפינסקי".

קבוצות פתוחות: $X, \emptyset, \{a\}$, קבוצות סגורות: $\{b\}, X, \emptyset$.

דוגמא קלאסית: "הטופולוגיה הקוסופית". הגדרה: בהינתן קבוצה X, נגדיר את $\tau_{cof} = \{O : |O^c| < \infty\} \cup \{\emptyset\}$.

הערה: אם X סופי אז הטופולוגיה הקוסופית על X היא הטופולוגיה הדיסקרטית.

נוכיח שהטופולוגיה הקוסופית היא תמיד טופולוגיה:
1. $\emptyset \in \tau_{cof}$ כי זה כתוב. $X \in \tau_{cof}$ כי $X^c = \emptyset$ שהיא סופית.
2. איחוד כלשהו: יהיו O_i קבוצות בτ_{cof}. אם כולן הן הקבוצה הריקה אז האיחוד שלהן הוא הקבוצה הריקה ששייך לטופולוגיה. אחרת, קיים איזשהו j כך ש$O_j \neq \emptyset$, ואז $(\bigcup O_i)^c \subseteq O_j^c$. כלומר, מוכל בקבוצה סופית ולכן סופי.
3. חיתוך סופי: יהיו $O_1, .., O_n$ קבוצות בτ_{cof}. אם אחת מהן ריקה- החיתוך ריק וסיימנו. אז נניח שכולן לא ריקות. לכן המשלים שלהן סופי.

$$\left(\bigcap O_i\right)^c = \bigcup O_i^c$$

איחוד של מספר סופי של קבוצות סופיות הוא קבוצה סופית.

דוגמא נוספת: $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$. ונגדיר $\tau = \{O : p \notin O\} \cup \{O : p \in O \wedge |O^c| \leq \aleph_0\}$.
הוכיחו בבית שזאת טופולוגיה.

הגדרה: מרחב טופולוגי נקרא מטריזבילי אם קיימת איזשהי מטריקה על X שמשרה את הטופולוגיה.

למשל, מרחב דיסקרטי הוא מטריזבילי כי הוא מושרה ממטריקת $0 - 1$.

מרחב שרפינסקי הוא לא מטריזבילי. בשביל להוכיח שמרחב הוא לא מטריזבילי צריך למצוא איזשהי תכונה שמתקיימת בכל מרחב מטרי, ולא מתקיימת בו. אז למשל, שרפינסקי הוא לא האוסדורף, כי לא ניתן להפריד את a וb ע"י שתי קבוצות פתוחות זרות. כי הקבוצה הפתוחה היחידה שמכילה את b היא X שמכילה גם את a.

תכונה נוספת שלא מתקיימת: ידוע שבמרחב מטרי כל נקודון הוא קבוצה סגורה. בשרפינסקי $\{a\}$ הוא לא סגור.

כעת נוכיח ש $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$. עם הטופולוגיה $\tau = \{O : p \notin O\} \cup \{O : p \in O \wedge |O^c| \leq \aleph_0\}$ הוא לא מטריזבילי.

הוכחה: האם זה האוסדורף? כן. אם $x, y \in \mathbb{R}$ אז אפשר לקחת $\{x\}, \{y\}$. אם $x \neq p$ אז $\{x\}^c, \{x\}$.

האם כל נקודון סגור? כן. $\{p\}$ סגור כי $\mathbb{R}$ פתוח. ו$\{x\}$ סגור לכל $x \neq p$ כי המשלים שלו מכיל את p, והמשלים של המשלים שלו הוא $\{x\}$ שהוא בן מניה.

עוד תכונה שמתקיימת במרחבים מטריים זה שכל קבוצה סגורה היא חיתוך בן מניה של קבוצות פתוחות.

$\{p\}$ סגור. נניח ש$\{p\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ קבוצות פתוחות. כולן מכילות את p אז המשלים שלהן חייב להיות בן מניה.

$$\mathbb{R} = \{p\}^c = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n^c$$

איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה הוא בן מניה, ו$\mathbb{R}$ לא בן מניה. סתירה.

התכנסות

יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. נגיד ש$x_n \to x$ אם לכל קבוצה פתוחה O כך ש$x \in O$ קיים איזשהו N כך שלכל $n > N$ $x_n \in O$.

דוגמאות:

1. כל סדרה שקבועה לבסוף על x מתכנסת לx.
2. במרחב שרפינסקי הסדרה הקבועה $x_n = a$ מתכנסת גם לa וגם לb. הקבוצה הפתוחה היחידה שמכילה את b היא X שמכיל את כל איברי הסדרה. ניתן לראות שבניגוד למרחב מטרי, במרחב טופולוגי כללי לסדרה אין בהכרח גבול יחיד.
3. בטופולוגיה הקוסופית על $\mathbb{N}$ תנו דוגמא לסדרה שיש לה אינסוף גבולות.

תשובה: $x_n = n$. נוכיח שכל מספר הוא גבול. יהי $m \in \mathbb{N}$. קבוצה פתוחה שמכילה את m היא קבוצה שהמשלים שלה סופי, O. בO^c יש רק מספר סופי של איברים, נניח שהמקסימום של האיברים בO^c הוא n_0. אז החל מ$n_0 + 1$ כל המספרים הטבעיים נמצאים בO. כלומר, O מכילה את הסדרה החלק מהמקום ה$n_0 + 1$.

זה לא נכון לכל סדרה בX. למשל, הסדרה הקבועה על 1 מתכנסת רק ל1. כי אם $m \neq 1$, אז $\{1\}^c$, זאת קבוצה פתוה שמכילה את m, ולא מכילה שום איבר מהסדרה.

4. ב$X = \mathbb{R} \cup \{p\}$. עם הטופולוגיה $\tau = \{O : p \notin O\} \cup \{O : p \in O \wedge |O^c| \leq \aleph_0\}$ הוכיחו ש$x_n \to x$ אמ"ם היא קבועה לבסוף על x.

הוכחה: כיוון ראשון: סדרה קבועה לבסוף על x תמיד תתכנס לx.

כיוון שני: נניח ש$x_n \to x$ רוצים להראות שx_n קבועה לבסוף על x. אם x מספר ממשי, נקח את $\{x\}$, זאת קבוצה פתוחה סביב x, החל ממקום מסויים כל איברי הסדרה נמצאים בקבוצה הזאת ולכן הם שווים לx.

נניח $x = p$.

$$O = \{p\} \cup \{x_n\}^c$$

זאת קבוצה שמכילה את p, והמשלים שלה הוא בן מניה, ולכן היא פתוחה. (המשלים שלה זה רק איברי הסדרה)

החל ממקום מסויים כל איברי x_n נמצאים בO, ברור שהם לא ב$\{x_n\}^c$, לכן הם שייכים ל$\{p\}$, כלומר שווים לp.

רציפות

1. הגדרה: יהיו $(Y,\tau'),(X,\tau)$ מ"ט ו $f:X\to Y$. נאמר ש f רציפה ב $x\in X$ אם לכל סביבה פתוחה V של $f(x)$ קיימת סביבה פתוחה U של x כך ש $U\subseteq f^{-1}(V)$.

(א) פונקציה $f:X\to Y$ תקרא רציפה אם היא רציפה בכל $x\in X$. זה שקול לכך ש: תמונה הפוכה של פתוחה היא פתוחה. כלומר, לכל $O\subseteq Y$ פתוחה, $f^{-1}(O)\subseteq X$ פתוחה. (כמובן בטופולוגיות המתאימות).

(ב) דוגמא: כל פונקציה $f:(X,\mathrm{disc})\to(Y,\tau')$ רציפה. כי בטופולוגיה הדיסקרטית כל קבוצה פתוחה.

(ג) כל פונקציה $f:(X,\tau)\to(Y,\{\emptyset,Y\})$ רציפה כי בטופולוגיה הטריוויאלית הקבוצות הפתוחות היחידות הן $\emptyset$ ו Y, ו- $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset, f^{-1}(Y)=X$, ואילו קבוצות שפתוחות בכל טופולוגיה.

(ד) למשל $id:(X,\tau)\to(X,\tau)$ רציפה.

(ה) כל פונקציה f רציפה בין מרחבים מטריים, רציפה גם בין הטופולוגיות שמושרות מהם.

2. הערה: האם פונקציית הזהות בין מרחבים טופולוגיים שונים היא רציפה?
תשובה: לא. למשל, נקח $X=\mathbb{R}$ $id:(X,\tau_{triv})\to(X,\tau_{disc})$. היא לא רציפה, כי למשל, $\{1\}$ פתוח ב(X,τ_{disc}), ו$f^{-1}\{1\}=\{1\}$ שלא פתוח ב(X,τ_{triv}).