אוניברסיטת תל- אביב
ס לפיזיקה ואסטרונומיה

וינה בפיסיקה קלאסית 1
מועד א׳

ט׳ אדר א׳ תשס״ג
11.02.03

המורה: פרופסור יחיאל ליכטנשטט.
המתרגלים: מר אודי פוקס, מר אלכס רצקר, מר אלי כהן.

משך הבחינה: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון כיס ודף נוסחאות בודד בלבד.

הוראות:
יש לכתוב בכתב יד ברור ונקי ולנמק כל שלב בפתרון.
יש לענות ע״ג טופס הבחינה בלבד. המחברת תשמש כטיוטה בלבד.
יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות בלבד.

מספר מחברת: 116

מספר ת״ז: 066638834

עניתי על השאלות הבאות: 2 3 4

23 33 33

90

בהצלחה!!!

100

92

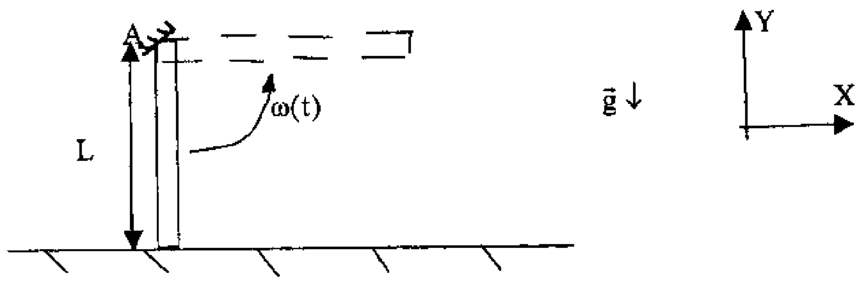
<u>שאלה 1</u> :

נתון מוט דק שאורכו L ומסתו M אחידה. המוט תלוי על ציר אופקי חלק בקצהו A ואלו קצהו השני מגיע סמוך לפני הקרקע. כשהמוט במצב אנכי מקנים למוט מהירות זוויתית התחלתית ω_0 כך שתנועת המוט היא מעלה. כשהמוט מגיע למצב אופקי, הציר A ניתק.

א. חשבו את רכיבי הכוח שהציר מפעיל על המוט, את המהירות הזוויתית ואת התאוצה הזוויתית כפונקציה של הזווית θ ושאר הקבועים הנתונים בבעיה.

ב. מהם רכיבי תאוצת מרכז המסה $\vec{a}_{cm}$ רגע לפני ורגע אחרי ניתוק הציר A ?

ג. מהו ערכו של ω_0 כך שהמוט יפגע בקרקע במצב אופקי? (מספיק לתת ערך אחד).



שאלה 2 :

טיפת גשם כדורית נופלת ממנוחה, מגובה h, דרך ענן ומסתה גדלה, עקב עיבוי, יחסית לשטח הפנים שלה. הרדיוס ההתחלתי של הטיפה זניח. הניחו תאוצת כובד קבועה.

א. חשבו את מהירות הטיפה ותאוצתה כפונקציה של הזמן.

ב. חשבו את מיקום הטיפה כפונקציה של הזמן.

ג. חשבו את האנרגיה המכנית הכללית של הטיפה כפונקציה של הזמן. האם אנרגיה זו נשמרת?

ד. חשבו את סטיית הטיפה מן האנך ברגע הפגיעה בקרקע. יש לפתור עבור $\theta = 0$, כלומר על קו המשווה.

נתונים: רדיוס כדור הארץ R והמהירות הזוויתית של כדור הארץ ω.

הערות: 1. בסעיפים א-ג יש להזניח כוחות מדומים שקיימים עקב סיבוב כדור הארץ.

2. בסעיף ד' יש להזניח את הדברים הבאים:

את שינוי קו הרוחב עם תנועת הטיפה.

את השינויים בתאוצת הכובד עם השינוי בגובה.

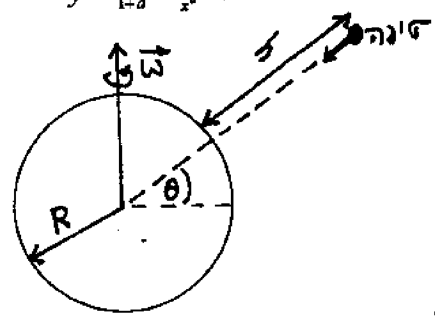
את החיכוך עם האוויר.

את הכוחות המדומים בכיוון האנכי (אל מרכז כדור הארץ).

תיקונים מסדר שני.

3. פתרון המשוואה הדיפרנציאלית הבאה: $\frac{dy}{dx} + a\frac{y}{x} = b$ כאשר a,b קבועים

הוא: $y = \frac{bx}{1+a} + \frac{c}{x^a}$



-10

א. $\frac{dm}{dt} = 4\pi r^2 \beta$ (β קבוע יחסי) $\Leftarrow$ $m = 4\pi r^2 \beta t + m_0$

m חלקי זמן

כיוון שב-$t=0$ רדיוס הטיפה $\to 0$ וכן $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ (צפיפות) נובע כי $m_0 = 0$.

כמו כן נובע ש-

$$4\pi r^2 \beta t = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$\Rightarrow \frac{3\beta t}{\rho} = r \Rightarrow m = 36\pi \rho^{-2}\beta^3 t^3 \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{3m(t)}{t}$$

כידוע $F_{ext} = \frac{dP}{dt}$ (כוחות חיצוניים)

$$\Rightarrow \frac{dm}{dt}V + \frac{dV}{dt}m(t) = -m(t)g$$

$$\frac{3m(t)}{t}V + \frac{dV}{dt}m(t) = -m(t)g \Rightarrow \frac{dV}{dt} + \frac{3V}{t} = -g$$

$$\Rightarrow V = \frac{-gt}{1+3} + \frac{c}{t^3} = \frac{-gt}{4} + \frac{c}{t^3}$$

לפי הפתרון הנתון

$$\dot{V} = \frac{-g}{4} - \frac{3c}{t^4}$$

נתון כי הטיפה נופלת ממנוחה ולכן $V(t=0)=0$

כלומר

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{-gt}{4}+\frac{c}{t^3}\right)=0$$

אם $c\neq 0$ אז $\lim_{t\to 0}\frac{c}{t^3}=\infty \Rightarrow c=0$

$$V=\frac{-gt}{4} \qquad \dot V=\frac{-g}{4}$$

ה.

$$h(t)=h+\int_0^t V\,dt=h-\frac{gt^2}{8}$$

3 ללא כוחות מדומים: הגוף יגיע לקרקע בזמן:

$$0=h-\frac{gt^2}{8}$$

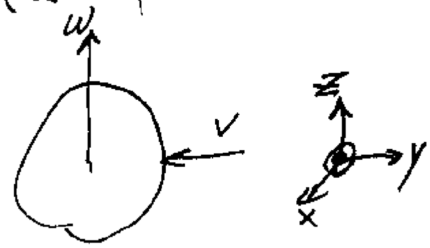
$$t=\sqrt{\frac{8h}{g}}$$

עם כוחות מדומים במערכת כדה"א (רק קוריוליס - לא מתחשבים בכוחות בכיוון האנכי)

$$\omega\times V=\frac{g\omega t}{4}\odot$$

כי לא מתייחסים לתיקון V מסדר שני שגורם קוריוליס עצמו

היוצא מהדף



(כאשר $g=g_0-\omega^2 R$ קבוע כי הנחנו $h\ll R$)

כיוון ש- $\theta=0$ - $\omega\times(\omega\times r)$ פועל אך ורק בכיוון ציר y אינו משפיע על הסטייה מן האנך

⇐ הכוח המשפיע הוא $-2\omega\times V$ (קוריוליס) ולכן הסטייה תהיה

$$a_{cor}=\frac{-g\omega t}{2}\hat{x}\Rightarrow V_{cor}=\frac{-g\omega t^2}{4}\hat{x}$$

$$\Rightarrow \underset{\text{הסטיה}}{\Delta X}=\frac{-g\omega t^3}{12}\hat{x}\Bigg]_{t=\sqrt{\frac{8h}{g}}=2\sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

$$=\frac{-g\omega\cdot 8\sqrt{\left(\frac{2h}{g}\right)^3}}{12}\hat{x}=\frac{4\omega\sqrt{2h^3}}{3\sqrt{g}}\hat{x}$$

(כלומר מערבה)

ג. כאמור, התאוצה הכובד "האפקטיבית" על הטיפה היא $\dot{V} = -\frac{g}{4}$

ולכן האנרגיה הכוללת תהיה

$$E = \underbrace{E_p}_{\text{פוטנציאלית}} + \underbrace{E_k}_{\text{קינטית}} = m(t)\frac{g}{4}h(t) + \frac{1}{2}m(t)\left(V(t)\right)^2$$

$$= 36\pi\rho^{-2}\beta^3 t^3 \cdot \frac{g}{4}\left(h - \frac{gt^2}{8}\right) + \frac{1}{2}\cdot 36\pi\rho^{-2}\beta^3 t^3 \cdot \frac{g^2 t^2}{16}$$

$$= 9\pi\rho^{-2}\beta^3 t^3 g h$$

$\Leftarrow$ האנרגיה אינה נשמרת (כי התאוצה קבועה אך המסה גדלה בהתמדה ולכן $m\frac{g}{4}h \neq \text{const.}$).

שאלה 3 :

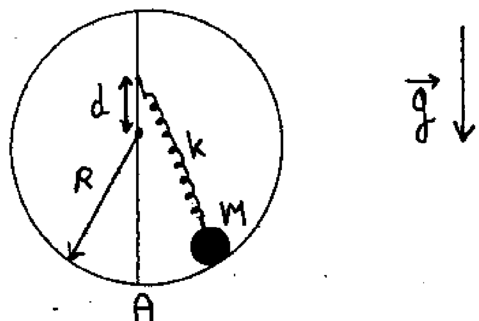
מסה M נעה ללא חיכוך על הדופן הפנימית של חישוק מעגלי אנכי ברדיוס R כאשר היא מחוברת באמצעות קפיץ לנקודה הנמצאת בגובה d מעל מרכז החישוק (ראו ציור). נתון שאורכו הרפוי של הקפיץ זניח וקבוע הקפיץ הוא k .

א. מהו התנאי שצריך להתקיים בין M, R, d, k, g כך שהמסה תהיה בשיווי משקל בנקודה A ?

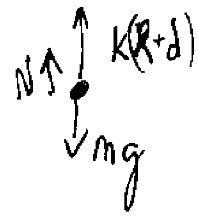
ענו על שני הסעיפים הבאים בהנחה שתנאי זה אכן מתקיים :

ב. איזו מהירות התחלתית יש להקנות למסה בנקודה A כך שהיא תוכל להשלים הקפה מלאה?

ג. הוכיחו שמצב שווי המשקל בנקודה A הוא יציב וחשבו את תדירות התנודות הקטנות סביב מצב זה. בקירוב של זוויות קטנות מתקיים : $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$.



א. כדי שהמסה תהיה בשיווי משקל דרוש שסכום הכוחות יהיה 0:



$$mg = k(R+d) + N$$

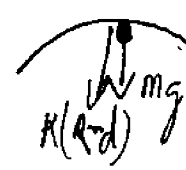
$$mg \geq k(R+d) \quad (N \geq 0)$$

(אם רוצים שהדרישה תהיה שהמסה תהיה בשיווי משקל עם ללא הכח הנורמלי אז התנאי הוא $mg = k(R+d)$)

ב. כדי שהמסה תוכל להשלים הקפה מלאה דרוש שלמעלה (בנקודה העליון של החישוק) ~~[illegible]~~ יתקיים

$$mg + k(R-d) = \underbrace{\frac{MV_c^2}{R}}_{\text{הכח הצנטריפטלי לתנועה מעגלית ברדיוס } R}$$

(כלומר דרוש ~~[illegible]~~ שמשוואת הכוחות תתן את הכח הצנטריפטלי עם עבור $N=0$)



אנרגיה בחלק העליון של החישוק: (נקודת 0 בנק' A)

$$E_f = \underbrace{mg \cdot 2R}_{\text{אנרגיה פוטנציאלית כובדית}} + \underbrace{\frac{1}{2}k(R-d)^2}_{\text{אנרגיה קפיצית}} + \underbrace{\frac{1}{2}mV_c^2}_{\text{ממשוואת הכוחות / קינטית}} = 2mgR + \frac{1}{2}k(R-d)^2 + \frac{1}{2}R(mg + k(R-d))$$

התנאי עבור המהירות התחילית V_s הוא שבספירה
יהיה לגוף אנרגיה השווה לאנרגיה הנ"ל ומעלה כלומר:

$$E_s = mg\cdot 0 + \frac{1}{2}K(R+d)^2 + \frac{1}{2}mV_s^2$$

$$E_f = E_s \Rightarrow 2mgR + \frac{1}{2}K(R-d)^2 + \frac{1}{2}R(K(R-d)+mg) = \frac{1}{2}K(R+d)^2 + \frac{1}{2}mV_s^2$$

$$2.5mgR + \frac{1}{2}K\left[(R-d)^2 + (R-d)R - (R+d)^2\right] = \frac{1}{2}mV_s^2$$

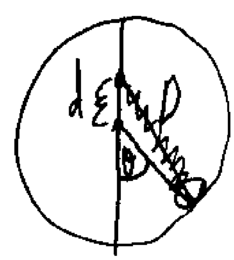
$$5mgR + K(R^2 - 5Rd) = mV_s^2$$

$$V_s = \sqrt{\frac{\boxed{5mgR + K(R^2 - 5Rd)}}{m}}$$

✓ 11/11

ד. נק' A היא נק' שיווי משקל יציבה אם הנגזרת הפוטנציאל שווה 0
בנק' זו והנגזרת השנייה חיובית:

$$E_p = mgR(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}K\ell^2$$



פיתגורס

$$\ell^2 = R^2\sin^2\theta + (d+R\cos\theta)^2 = R^2 + d^2 + 2Rd\cos\theta$$

$$\Rightarrow E_p = mgR(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}K(R^2 + d^2 + 2Rd\cos\theta)$$

$$E_p' = mgR\sin\theta - RdK\sin\theta \underset{\substack{\Downarrow \\ \theta=0 \ A \text{ בנק'}}}{=} 0$$

$$E_p'' = mgR\cos\theta - RdK\cos\theta \underset{\substack{\Downarrow \\ \theta=0 \ A \text{ בנק'}}}{=} R(mg - dK)$$

התנאי מסעיף א' מתקיים, ולכן $mg \ge KR + Kd$. כיוון ש-$R>0, K>0$
נובע כי $mg > Kd$ ולכן $E_p''>0$ בנק' A ולכן היא נק' שיווי משקל
יציבה.

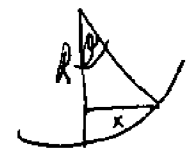
בנק' ליד A ניתן לחשב את E_p באמצעות פיתוח טיילור עד סדר שני
(כי התנודות קטנות θ קטן מאוד ולכן האיברים מעבר לסדר שני זניחים:

$$E_p(\theta) = E_p(0) + \underbrace{E_p'(0)}_{0}\theta + \frac{1}{2}E_p''(0)\theta^2 = \frac{1}{2}k(R+d)^2 + \frac{1}{2}R(mg-kd)\theta^2$$

בכל נק' $x = R\tan\theta$ ועבור זוויות קטנות

$$x = R\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \approx R\frac{\theta}{1} = R\theta$$

$$\theta = \frac{x}{R}$$



$$\Rightarrow E_p(x) \approx \frac{1}{2}k(R+d)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mg-kd}{R}\right)x^2$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{\frac{mg-kd}{R}}{m} = \frac{mg-kd}{mR}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mg-kd}{mR}}$$ ✓ 11/11

(כי הכח המחזיר בכל נק' הוא $-E_p'(x)$ כלומר

$$m\ddot{x} = -E_p'(x) = -\left(\frac{mg-kd}{R}\right)x$$

וזה ה-ω הפותר את המשוואה)

: <u>שאלה 4</u>

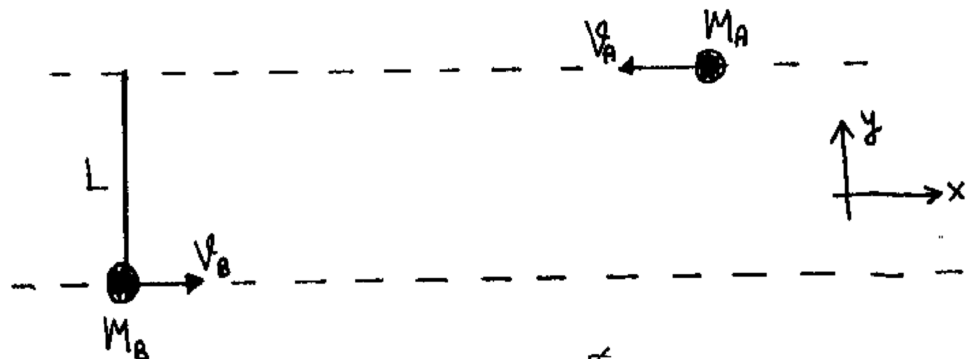
שני מחליקים על הקרח (A ו- B) נעים זה לקראת זה בקווים מקבילים המרוחקים מרחק L זה מזה. מסת המחליק A היא M_A ומהירותו V_A , מסת המחליק B היא M_B ומהירותו V_B. מחליק B אוחז במקל באורך L המכוון אנכית לכיוון תנועתם. כאשר המחליקים עוברים זה ליד זה מחליק A אוחז במקל ושניהם נעים יחד כאשר שניהם אוחזים בקצות המקל.

א. מהי מהירות מרכז המסה של צמד המחליקים?

ב. מהי המהירות הסיבובית של המחליקים לאחר שהם נעים יחד?

ג. כעת צמד המחליקים מתקרב זה לקראת זה מהי מהירות הסיבוב החדשה כאשר המרחק ביניהם הוא $L/2$?

ד. האם האנרגיה נשמרת במהלך ההתקרבות? ענו ע"י חישוב מפורט והסבירו התוצאה המתקבלת.



א.

$$V_{cm} = \frac{M_B V_B - M_A V_A}{M_A + M_B}\hat{X}$$

8/8

ב. נגדיר y=0 עבור מיקום המסה B בציר y לפני ההתנגשות:

$$\Rightarrow y_{cm} = \frac{M_A L}{M_A + M_B} \quad \Rightarrow \quad y_{A-cm} = \frac{M_B L}{M_A + M_B}$$

המרחק בין M_A למרכז המסה בציר y

תנע זוויתי ביחס למרכז המסה לפני ההתנגשות

$$L_1 = (y_B - y_{cm}) M_B \cdot \left(V_B - \frac{M_B V_B - M_A V_A}{M_A + M_B}\right) + y_{A-cm} \cdot M_A \cdot \left(-V_A - \frac{M_B V_B - M_A V_A}{M_A + M_B}\right)$$

$$= -\frac{M_A M_B L}{M_A + M_B} \cdot \frac{M_A (V_A + V_B)}{M_A + M_B} - \frac{M_B \cancel{L} M_A L}{M_A + M_B} \cdot \frac{M_B (V_A + V_B)}{M_A + M_B} = -\frac{M_A M_B L}{(M_A + M_B)^2}(V_A + V_B)(M_$$

$$= -\frac{M_A M_B L}{M_A + M_B}(V_A + V_B)$$

תנע זוויתי ביחס למרכז מסה אחרי ההתנגשות

$$L_2 = I\omega \qquad I = (y_B - y_{cm})^2 M_B + (y_{A-cm})^2 M_A = \frac{M_A M_B L^2}{(M_A + M_B)^2}(M_A + M_B) = \frac{M_A M_B L^2}{M_A + M_B}$$

בגלל שפועלים רק כוחות פנימיים נשמר התנע הזוויתי:

$$|L_1| = L_2 \Rightarrow \frac{M_A M_B L}{M_A+M_B}\cdot(V_A+V_B) = \frac{M_A M_B L^2}{M_A+M_B}\,\omega$$

השימור הוא בערך מוחלט ולכן קבלתי ערך חיובי ל-ω.

$$\Rightarrow \omega = \frac{V_A+V_B}{L}$$

✓ 9/9

2. תנע זוויתי לאחר ההתקרבות:

$$L_3 = I'\omega' \qquad I' = (y_B - y_{cm})^2 M_B + (y_A - cm)^2 M_A$$

נגדיר שוב $y_B=0 \Leftarrow$

$$y_{cm} = \frac{M_A L}{2(M_A+M_B)} \qquad y_A - cm = \frac{M_B L}{2(M_A+M_B)}$$

$$\Rightarrow I' = \frac{M_A M_B L^2}{4(M_A+M_B)^2}(M_A+M_B) = \frac{M_A M_B L^2}{4(M_A+M_B)}$$

בעת ההתקרבות פועלים רק כוחות פנימיים ולכן התנע הזוויתי נשמר:

$$L_2 = L_3 \Rightarrow \frac{M_A M_B L^2}{M_A+M_B}\,\omega = \frac{M_A M_B L^2}{4(M_A+M_B)}\,\omega'$$

$$\Rightarrow \omega' = 4\omega = \frac{4(V_A+V_B)}{L}$$

✓ 8/8

3. התנע הקווי נשמר במערכת בזמן ההתקרבות (אין כוחות חיצוניים)
תנע זה תלוי אך ורק במהירות מרכז המסה ובמסה הכוללת של המערכת
וכיוון שהמסה אינה משתנה גם מהירות מרכז המסה לא.
(תנע של מערכת ניתן ע"י $(\Sigma M)V_{cm}$ ואינו תלוי בהסתובבות המערכת סביב עצמה).

אנרגיה בתחילת ההתקרבות ($D_{AB}=L$):

$$E_1 = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + I\omega^2$$

אנרגיה בסוף ההתקרבות ($D_{AB}=\frac{L}{2}$)

$$E_2 = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + I'\omega'^2$$

לפי סעיף קודם $I=4I'$ $\omega'=4\omega$

$$\Rightarrow I\omega^2 = 4I'\left(\frac{\omega'}{4}\right)^2 = \frac{I'\omega'}{4}$$

מכאן שהאנרגיה אינה נשמרת בזמן ההתקרבות,
כלומר שעל מנת להתקרב הה על המחליקים להשקיע אנרגיה
(לפחות אחד מהם השקיע אנרגיה בתנועה
לאורך המוט, אשר שינתה את מהירותו ולכן את האנרגיה
הקינטית שלו).