עוד קצת על התמרת לפלס

תרגיל

פתור את הבעייה

$$y''\left(t\right)=\begin{cases} t\left(t-1\right) & 0\le t<1\\ 0 & t\ge1 \end{cases}=:f\left(t\right)\qquad y\left(0\right)=y'\left(0\right)=0$$

פתרוןH\left(t\right)f\left(t\right)

ניתן לרשום את $f\left(t\right)$ בעזרת פונקיית הביסייד עם שני אינדקסים:

$$f\left(t\right)=t\left(t-1\right)H_{0,1}\left(t\right)=t\left(t-1\right)\left[H_{0}\left(t\right)-H_{1}\left(t\right)\right]=t\left(t-1\right)\left[H\left(t-0\right)-H\left(t-1\right)\right]=$$

$$=t\left(t-1\right)H\left(t\right)-t\left(t-1\right)H\left(t-1\right)$$

הערה: $\mathcal{L}\left\{ f\left(t\right)\right\} =\mathcal{L}\left\{ H\left(t\right)f\left(t\right)\right\}$ שכן $t<0$ לא מעניין את התמרת לפלס

$$\mathcal{L}\left\{ f\left(t\right)\right\} =\mathcal{L}\left\{ t\left(t-1\right)H\left(t\right)\right\} -\mathcal{L}\left\{ t\left(t-1\right)H\left(t-1\right)\right\} =...$$

$$\left[t^{k}\overset{\mathcal{L}}{\to}\frac{\Gamma\left(k+1\right)}{s^{k+1}}\right]$$

$$...=\frac{2}{s^{3}}-\frac{1}{s^{2}}-\mathcal{L}\left\{ t\cdot\left(\left(t-1\right)H\left(t-1\right)\right)\right\} =$$

$$=\frac{2}{s^{3}}-\frac{1}{s^{2}}-\left(-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left\{ \left(t-1\right)H\left(t-1\right)\right\} \right)=...$$

נסמן $g\left(t\right)=t$, אזי

$$G\left(s\right)\equiv\mathcal{L}\left\{ g\left(t\right)\right\} =\frac{1}{s^{2}}$$

$$\Rightarrow\mathcal{L}\left\{ \left(t-1\right)H\left(t-1\right)\right\} =\mathcal{L}\left\{ g\left(t-1\right)\cdot H\left(t-1\right)\right\} =e^{-1\cdot s}\cdot G\left(s\right)=e^{-s}\cdot\frac{1}{s^{2}}$$

נחזור להתמרה:

$$...=\frac{2}{s^{3}}-\frac{1}{s^{2}}+\frac{d}{ds}\left(e^{-s}\frac{1}{s^{2}}\right)=\frac{2}{s^{3}}-\frac{1}{s^{2}}-e^{-s}\cdot\frac{1}{s^{2}}+e^{-s}\cdot\frac{-2}{s^{3}}=$$

$$= \boxed{\frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2} - e^{-s} \cdot \frac{1}{s^2} + 2e^{-s} \frac{1}{s^3}}$$

נפעיל התמרת לפלס על המד"ר המקורית:

$$y''(t) = f(t)$$

$$\mathcal{L}\{y''\} = \mathcal{L}\{f\}$$

$$s^2 Y(s) - s\cancel{y(0)} - \cancel{y'(0)} = F(s)$$

$$s^2 Y(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2} - e^{-s} \cdot \frac{1}{s^2} - 2 \cdot e^{-s} \cdot \frac{1}{s^3}$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s^4} - e^{-s} \cdot \frac{1}{s^4} - 2e^{-s} \cdot \frac{1}{s^5}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2} - \frac{1}{s^4} - e^{-s} \cdot \frac{1}{s^4} - 2e^{-s} \cdot \frac{1}{s^5}\right\}$$

ראינו מקודם ש

$$\mathcal{L}\left\{t^k\right\} = \frac{k!}{s^{k+1}} \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{t^k}{k!}\right\} = \frac{1}{s^{k+1}} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{k+1}}\right\} = \frac{t^k}{k!}$$

ולכן

$$y(t) = 2\frac{t^4}{4!} - \frac{t^3}{3!} - \frac{(t-1)^3}{3!} H(t-1) - 2\frac{(t-1)^4}{4!} H(t-1)$$

אם כן,

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{6}t^3 & 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{6} - t^3 - \frac{(t-1)^3}{6} - \frac{(t-1)^4}{12} & t > 1 \end{cases}$$

יש חשש שאין רציפות בנקודת ה"תפר" $t = 1$. אבל:

$$\lim_{t \to 1^{-1}} y(t) = \lim_{t \to 1^{-1}} \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{6}t^3 = \frac{1}{12} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{12}$$

$$\lim_{t \to 1^+} y(t) = \lim_{t \to 1^+} \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{6}t^3 - \frac{(t-1)^3}{t} - \frac{(t-1)^4}{12} = -\frac{1}{12}$$

ניתן גם לבדוק ש$y'(t)$ רציפה ב$t=1$:

$$y'(t)=\begin{cases}\frac{t^3}{3}-\frac{1}{2}t^2 & 0\le t<1\\ \frac{t^3}{3}-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}(t-1)^2-\frac{1}{3}(t-1)^3 & t\ge 3\end{cases}$$

כאן נגמר החומר!!!

שיעור חזרה

תרגיל

קצב הילוד באוכלוסיה מסויימת פרופורציונאלי למספר התושבים, עם קבוע פרופורציה a ($a>0$) וקצב התמותה הוא קבוע, b אנשים מתים בכל יום. אם $P(t)$ הוא מספר האנשים באוכלוסיה בזמן t (שנמדד בימים):

(א) מצא מד"ר עבור P

(ב) פתור אותה בהנתן תנאי התחלה כלשהו, $P(0)=P_0$

פתרון

(א) קצב השינוי באוכלוציה הוא הנגזרת $P'(t)$. השינוי בגודל האוכלוסיה הוא מספר האנשים שנולדים פחות מספר האנשים שמתים.

$$P'(t)=a\cdot P(t)-b$$

$$\boxed{P'=aP-b}$$

(ב) נתחיל בפתרון המד"ר ההומוגנית

$$P'=aP$$

$$P'-aP=0$$

הפולינום האופייני הוא

$$\lambda-a=0$$

$$\lambda=a$$

$$\Rightarrow (P_h =)\, P_C = C_1 e^{at} = C \cdot e^{at}$$

כדי לפתור את המד"ר המקורית נשתמש בוריאציית המקדמים:

$$\begin{cases} P(t) = C(t)\, e^{at} \\ P'(t) = C'(t)\, e^{at} + aC(t)\, e^{at} \end{cases}$$

נציב במד"ר:

$$P' = aP - b$$

$$C'(t)\, e^{at} + \cancel{aC(t)\, e^{at}} = \cancel{aC(t)\, e^{at}} - b$$

$$C'(t) = -be^{at}$$

$$C(t) = \int -be^{-at}\, \mathrm{d}t = \frac{-\, be^{-at}}{-a} + K = \frac{b}{a} e^{-at} + K$$

$$\Rightarrow P = C(t)\, e^{at} = \left(\frac{b}{a} e^{-at} + K \right) e^{at} = \frac{b}{a} + Ke^{at}$$

נציב תנאי התחלה:

$$P(0) = \frac{b}{a} + K \overset{!}{=} P_0$$

$$K = P_0 - \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(t) = \frac{b}{a} + \left(P_0 - \frac{b}{a} \right) e^{at}}$$

הערה: זה לא מה שקורה "באמת" - משוואת אוכלוסיה אמיתית היא הרבה יותר מסובכת, ובכלל לא לינארית.

תרגיל

המחלקה למתמטיקה בMIT ניתחה את המחזה של שייקספיר Romeo&Juliet והגיע למסקנה שאם $R(t)$ הוא כמות האהבה של רומיאו ליוליה, ו$J(t)$ הוא כמות האהבה של יוליה לרומיאו, אזי

$$R' = J$$

$$J' = -\frac{17}{16}R + \frac{1}{2}J$$

מפה אנחנו רואים שלרומיאו אין ממש מודעות עצמית. השינוי באהבה שלו ליוליה(הנגזרת) תלויה רק בכמה שיוליה אוהבת אותו. אצל יוליה המצב מורכב יותר. יש לה מודעות עצמית "בריאה". אם היא אוהבת אותו, עצם כך גורם לה לאהוב אותו יותר. מצד שני, אם הוא מפגין אהבה כלפיה היא נבהלת, ומתחילה לאהוב אותו פחות.

נניח שנתון תנאי התחלה $\begin{pmatrix} R(0) \\ J(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. כלומר, בזמן $t = 0$, רומיאו מחבב את יוליה, אבל היא ניטרלית כלפיו.

ניתן לראות ש:

$$R'(0) = J(0) = 0$$

$$J'(0) = -\frac{17}{16}R(0) + \frac{1}{2}J(0) = -\frac{17}{16} < 0$$

כלומר, ברגע שיוליה מבחינה שרומיאו אוהב אותה, היא נהיית עויינת כלפיו(הנגזרת שלילית)

$$R' = J$$

$$J' = -\frac{17}{16}R + \frac{1}{2}J$$

אם כך, גם האהבה של רומיאו מתחילה לרדת עד לאפס. האבהות ממשיכות לצנוח עד שרומיאו שונא אותה כל כך עד שהיא רוצה אותו.

כל "סיבוב" נהיה יותר ויותר אינטנסיבי, עד שמגיעים לסוף המר.

$$\begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{17}{16} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix}$$

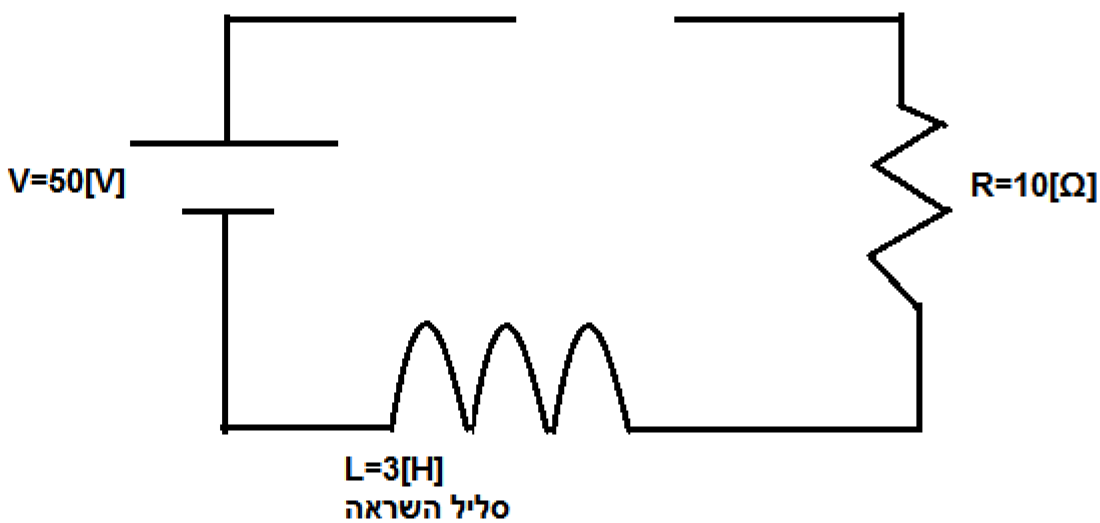
אפשר לפתור עם ע"ע וו"ע. הפתרון שיתקבל הוא

$$R(t) = \frac{1}{4}e^{t/4}(4\cos t - \sin t)$$

$$J(t) = -\frac{17}{16}e^{t/4}\sin t$$

אפשר לרשום בMupad:

```
plot(Plot::Curve2d(1/4*exp(t/4)*(4*cos(t)-sin(t)),17/16*...)
```



V=50[V]
R=10[Ω]
L=3[H]
סליל השראה