סיכום של פתרון בטורי חזקות

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0$$

נחלק לכמה מקרים:

- x_0 נק' אורדינרית: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, a_0, a_1 מקדמים חופשיים.
- x_0 נק' רג' סינג': $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+\alpha}$, $a_0 \neq 0$, α מוצאים ממשוואה ריבועית "המשוואה המציינת".
  α_1, α_2 שורשים:
  - אם $\alpha_1 - \alpha_2$ אינו שלם - שני פתרונות בת"ל.
  - אם $\alpha_1 - \alpha_2$ שלם - ניקח $\alpha_1 \geq \alpha_2$. יש פתרון אחד - $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+\alpha_1}$.
    את הפתרון השני מקבלים ע"י הורדת סדר:

    $$y_2 = k \log(x - x_0)\, y_1(x) + (x - x_0)^{\alpha_2}$$

    זוהי פונקציה אנליטית, ו-k יכול להיות 0!!! (לא בהכרח מקבלים $\log$ בפתרון השני).

שתי משוואות שחקרנו:

משוואת לז'נדר

$$\left(1 - x^2\right) y'' - 2xy' + cy = 0$$

0 נקודה אורדינרית.
$x = \pm 1$ - נקודות רגולריות סינגולריות - גם ∞.
אם $c = n(n+1)$, $n \geq 0$ שלם, יש פתרון פולינומי מדרגה n. עוד פרטים - בשיעור היום.

משוואת בסל

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right) y = 0 \quad \nu \geq 0$$

0 נקודה רג. סינג.
∞ נקודה לא רג. סינג.

פתרונות המשוואה המציינת - $\pm\nu$

$$y_1(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p x^{2p+\nu}}{2^{2p}p!(1+\nu)(2+\nu)\cdots(p+\nu)}$$

$$y_2(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p x^{2p-\nu}}{2^{2p}p!(1-\nu)(2-\nu)\cdots(p-\nu)}$$

(המשך עוד מעט).

פונקציית גמה Gamma Function

מגדירים $x>0$.

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

(מוגדר היטב)

טענה

לכל $x>0$ $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$

הוכחה

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1)-x\Gamma(x)&=\int_0^\infty t^x e^{-t}dt-x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt\\&=\int_0^\infty\left(t^x e^{-t}-xt^{x-1}e^{-t}\right)dt\\&=\int_0^\infty-\frac{d}{dt}\left(t^x e^{-t}\right)dt=-\left[t^x e^{-t}\right]_0^\infty=0\end{aligned}$$

$\blacksquare$

מסקנה

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=\left[-e^{-t}\right]_0^\infty=1$$

לפי הטענה:

$$\Gamma(2)=1\Gamma(1)=1$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\Gamma(5) = 4\Gamma(4) = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$\vdots$$

לכל $n \geq 1$ שלם:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

ניתן להוכיח $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ וכו'

דרך הטענה גם ניתן להגדיר $\Gamma(x)$ עבור $x < 0$, <u>למעט</u> x שלם שלילי.

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$$

חזרה למש. בסל

הגדרה

לכל ν מגדירים פונקצית בסל מסדר ν ע"י

$$J_\nu(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p} + \nu}{2^{2p}\Gamma(p+1)\Gamma(p+\nu+1)}$$

כאשר אם ν שלם שלילי, מתחילים את הסכום מ$p = -\nu$.

$$\Gamma(p+1) = p!$$

$$\Gamma(p+\nu+1) = (p+\nu)\Gamma(p+\nu)$$

$$= (p+\nu)(g-1+\nu)\Gamma(p+\nu-1)$$

$$= ...$$

$$= (p+\nu)(p-1+\nu)\cdots(1+\nu)\Gamma(1+\nu)$$

רואים שאם $\nu \geq 0$, $J_\nu(x)$ הוא פתרון של משוואת בסל.

ניתן לבדוק

- שאם ν אינו שלם, $J_\nu(x)$ ו$J_{-\nu}(x)$ הם שני פתרונות בת"ל של משוואת בסל.
- שאם ν שלם, $J_\nu(x) = (-1)^\nu J_{-\nu}(x)$.

בדיקה

ללא הגבלת כלליות ניקח ν שלם חיובי. ($\nu = 0$ זה טריביאלי).

$$J_\nu(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+\nu}}{2^{2p+\nu}\Gamma(p+1)\Gamma(p+1+\nu)}$$

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{p=\nu}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p-\nu}}{2^{2p-\nu}\Gamma(p+1)\Gamma(p-\nu+1)} = ...$$

ניקח $p = \nu + p'$:

$$... = \sum_{p'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p'+\nu} x^{2p'+\nu}}{2^{2p'+\nu}\Gamma(p'+\nu+1)\Gamma(p'+1)} = (-1)^\nu J_\nu(x)$$

■

סיכום ביניים

- פונקציית בסל:

$$J_\nu(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p}+\nu}{2^{2p}\Gamma(p+1)\Gamma(p+\nu+1)}$$

אם ν שלם שלילי הסכום מתחיל מ$p = -\nu$

- אם ν אינו שלם, $J_\nu, J_{-\nu}$ שני פתרונות בת"ל של מש' בסל $x^2y'' + xy' + (\nu^2 - x^2)y = 0$
- אם ν שלם, אזי עדיין $J_\nu, J_{-\nu}$ פותרים את משוואת בסל, אבל $J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$ תלויים!!!

טענה

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n = e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}$$

("פונקציה יוצרת")

הוכחה

$$e^{\frac{xt}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\left(\frac{xt}{2}\right)^m$$

$$e^{\frac{-x}{2t}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}\left(\frac{-x}{2t}\right)^p$$

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{m!p!}\left(\frac{xt}{2}\right)^m \left(\frac{-x}{2t}\right)^p$$

המקדם של t^n הוא מתקבל מכל איבר שבו $m-p=n \Leftrightarrow m=p+n$
המקדם הוא:

$$\sum_{p=\max(0,-n)}^{\infty} \frac{1}{p!\,(p+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{p+n} \left(\frac{-x}{2}\right)^p =$$

$$= \sum_{p=\max(0,-n)}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+n}}{2^{2p+n}\Gamma(p+1)\Gamma(p+n+1)}$$

$$= J_n(x)$$

■

תוצאות

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n = e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}$$

(1) אם גוזרים את הפונקציה היוצרת ביחס לx

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(x)\, t^n = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)\, t^m$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)\, t^{m+1} - \sum_{m=-8}^{\infty} J_m(x)\, t^{m-1}\right)$$

נסתכל על המקדם של t^n בשני הצדדים.

$$J_n'(x) = \frac{1}{2}\left(J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right)$$

$$J_0'(x) = \frac{1}{2}\left(J_{-1}(x) - J_1(x)\right) = -J_1(x)$$

$$\boxed{J_0'(x) = -J_1(x)}$$

(2) אם גוזרים את פונקציה היוצרת ביחס לt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, n t^{n-1} = \frac{x}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}$$

$$= \frac{x}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n$$

מקדם של t^m:

$$(m+1)\, J_{m+1}(x) = \frac{x}{2}\left(J_m(x) + J_{m+2}(x)\right)$$

$$\boxed{\frac{n}{x} J_{n+1} = \frac{1}{2}\left(J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)\right)}$$

ייצוג אינטגרלי

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(n\theta - x\sin\theta\right)\, \mathrm{d}\theta$$

(n שלם).

הפתרון השני של מש. בסל

הגדרה

פונקציות בסל מהסוג השני(פונקציות נוימן) מוגדרות ע"י

$$Y_{\nu}\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{J_{\nu}\left(x\right)\cos\left(\nu\pi\right)-J_{-\nu}\left(x\right)}{\sin\left(\nu\pi\right)} & \nu\notin\mathbb{Z}\\ \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{\partial J_{\nu}\left(x\right)}{\partial\nu}-\left(-1\right)^{\nu}\dfrac{\partial J_{-\nu}\left(x\right)}{\partial\nu}\right) & \nu\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

(ניתן להראות שמקבלים שורה שנייה ע"י גבול של שורה ראשונה כאשר ν שואף לשלם.)

$Y_{\nu}\left(x\right)$ הוא פתרון של משוואת בסל. ($Y_{n}\left(x\right)$ מתבדר כאשר $x\to0$)

פולינומי לז'נדר

ראינו שלמש'

$$\left(1-x^{2}\right)y''-2xy'+n\left(n+1\right)y=0$$

יש פתרון פולינומי מדרגה n.

יוצא שיש דרך יותר ישרה להגדיר פולינומים אלה:

הגדרה

$$\boxed{P_{n}\left(x\right)=\frac{1}{2^{n}n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(x^{2}-1\right)^{n}}$$

($P_{n}\left(x\right)$ פולינום לז'נדר מדרגה n)

זוהי נוסחת רודריגס Rodrigues Formula

טענה

$P_{n}\left(x\right)$ מקיים את מש' לז'נדר

הוכחה

$$\frac{d}{dx}\left(x^{2}-1\right)^{n}=2nx\left(x^{2}-1\right)^{n}$$

נגזור את זה n פעמים. תזכורת: $\frac{d^n}{dx^n}(ab) = a^{(n+1)}b+(n+1)a^{(n)}b'+\frac{n(n+1)}{2}a^{(n+1)}b''+$ .... במקרה שלנו:

$$\left(x^2-1\right)\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}\left(x^2-1\right)^n+(n+1)\,2x\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x^2-1\right)^n+\frac{n(n+1)}{2}2\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n = ...$$

(כל שאר הנגזרות שוות לאפס)

$$... = 2n\left[x\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x^2-1\right)^n+(n+1)\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n\right]$$

נחלק ע"י $2^n n!$

$$\left(x^2-1\right)P_n''(x)+2x(n+1)P_n'(x)+n(n+1)P_n(x) = 2n\left[xP_n'(x)+(n+1)P_n(x)\right]$$

$$\left(1-x^2\right)P_n''(x)-2xP_n'(x)+n(n+1)P_n(x)=0$$

■

ניתן להשתמש בנוסחא כדי למצוא בקלות את הפולינומים:

$$P_0(x)=1$$

$$P_1(x)=x$$

$$P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$$

$$P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x$$

$$P_n(1)=1$$

$$P_n(-1)=(-1)^n$$

יש ל$P_n(x)$ n שורשים בין -1 ל1.

פונקציה יוצרת

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\,t^n=\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$$

(לא נוכיח בינתיים). נגזור ביחס ל-x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)\, t^n = \frac{t}{\left(\sqrt{1-2xt+t^2}\right)^3}$$

$$\left(1-2xt+t^2\right)\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)\, t^n = t\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n$$

מקדם של t^{n+1}:

$$P_0(x) = P_{n-1}'(x) - 2xP_n'(x) + P_{n+1}'(x)$$

אם גוזרים ביחס ל-t:

$$\boxed{(n+1)\, P_{n+1}(x) = (2n+1)\, xP_n(x) - nP_{n-1}(x)}$$

זוהי רקורסיה לפולינום לז'נדר.
אם מחברים מקבלים:

$$\boxed{\frac{x^2-1}{n} P_n'(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x)}$$

זוהי נוסחה לנגזרות.

הפתרון השני של מש' לז'נדר

ע"י הורדת סדר מוצאים שיש פתרון שני בצורה $Q_n(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) P_n(x) +$

$R_n(x)$ - פולינום מדרגה $n-1$ (0 כאשר $n=0$)

הוכחה

מציגים

$$y = zP_n(x)$$

$$y' = zP_n' + z'P_n$$

$$y'' = zP_n'' + 2z'P_n' + z''P_n$$

$$\left(1-x^2\right)\left(zP_n'' + 2z'P_n' + z''P_n\right) - 2x\left(zP_n' + z'P_n\right) + n(n+1)\, zP_n = 0$$

אנו יודעים שכל מה שיש בו z יצטמצם(כי $zP_n(x)$ מקיים את המשוואה). נחלק ב- $1-x^2$:

$$z''P_n + 2z'P_n' - \frac{2x}{1-x^2}z'P_n = 0$$

נחלק ב-$P_n z'$:

$$\frac{z''}{z'} + \frac{2P_n'}{P_n} - \frac{2x}{1-x^2} = 0$$

$$\ln z' + 2\ln P_n + \ln\left(1-x^2\right) = C$$

$$z'P_n^2\left(1-x^2\right) = C$$

$$z' = \frac{C}{P_n^2\left(1-x^2\right)} = C\left[\frac{\alpha}{1+x} + \frac{\alpha_2}{1-x} + ...\right]$$

(ממשיכים לקבל את הצורה הנדרשת