

מבנים אלגבריים - תירגול 6

27 בנובמבר 2015

הגדרה: יהיו $(G_1, *)$, (G_2, \cdot) 2 חבורות. פונקציה $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ נקראת הומומורפיזם (של חבורות) אם

$$\forall x, y \in G_1 : \phi(x * y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$$

בנוסף אם ϕ חח"ע הוא יקרא מונומורפיזם. אם הוא על הוא יקרא אפימורפיזם. אם הוא חח"ע ועל הוא יקרא איזומורפיזם.

$$\text{הערה: } \phi(e_{G_1}) = e_{G_2}$$

תרגיל: יהא $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ איזומורפיזם. יהא $g \in G_1$ מסדר n אזי $\phi(g)$ ג"כ מסדר n הוכחה: נסמן $o(\phi(g)) = m$ מתקיים $\phi(g^m) = \phi(g)^m = e_{G_2}$ ולכן $m \leq n$. באותו אופן נסמן $g' = \phi(g)$ ונסתכל על $\phi^{-1} : G_2 \rightarrow G_1$ אזי $\phi^{-1}(e) = \phi^{-1}(g'^m) = \phi^{-1}(e) = e$ ולכן $n \leq m$ וסיימנו.

תרגיל: יהא $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ איזומורפיזם. אם G_1 חילופית אז גם G_2 הוכחה: יהיו $a, b \in G_2$ צ"ל כי $ab = ba$. כיוון ש ϕ איז' אזי קימים $x, y \in G_1$ כך ש $\phi(x) = a, \phi(y) = b$ ואז

$$ab = \phi(x)\phi(y) = \phi(xy) = \phi(yx) = \phi(y)\phi(x) = ba$$

תרגיל: הוכח כי S_n לא איזומורפי ל S_m אם $m \neq n$.

פתרון: $|S_n| = n! \neq |S_m| = m!$ ולכן לא קיימת פונקציה חח"ע ועל ביניהם.

תרגיל: הוכח כי S_3 לא איזומורפי ל \mathbb{Z}_6 .

פתרון: S_3 לא אבלית ו \mathbb{Z}_6 כן

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \not\cong \mathbb{Z}_4$$

פתרון כל $g \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ הוא מסדר לכל היותר 2 ואילו ב \mathbb{Z}_4 יש איבר מסדר 4.

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$$

תרגיל: הוכח כי $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$ פתרון: ראינו כי $(1, 1)$ יוצר של $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ והסדר שלו 6. ל \mathbb{Z}_6 יש ג"כ יוצר מסדר 6 שהוא 1. נגדיר $\phi : \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ע"י $\phi(1) = (1, 1)$. בעצם שניהם איזומורפיזם לחבורה מופשטת

שהיא $\{g^6 = 1, g, g^2, g^3, g^4, g^5\}$. גם שורשי יחידה מסדר 6 היא כזאת עם יוצר $e^{\frac{2\pi i}{6}}$

תרגיל: כמה איזומורפיזמים יש בין $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ל \mathbb{Z}_6

פתרון: מספיק לקבוע לאיפה נשלח 1. בנוסף, 1 צריך להשלח ליוצר וכל יוצר יגדיר לי איזמו' אחר. לכן השאלה שקולה לכמה יוצרים יש ל $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ שראינו בעבר שהתשובה היא 2

חידוד על הומו'.

תרגיל: כמה הומו' יש בין $\phi : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}$ וכמה $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$

פתרון: אם קיים הומו' $\phi : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}$ אז הוא נקבע ע"י $\phi(1) = a$ אזי צריך להתקיים

$$0 = \phi(0) = \phi(n \cdot 1) = n\phi(1) = na$$

האיבר היחיד שמתקיים זאת הוא $a = 0$ ולכן קיים הומו' יחיד לצד השני: אם קיים $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ אז הוא נקבע ע"י $\phi(1) = [a]$ בסמך $[a]$. באופן מפורש ההומורפיזם הוא $\phi(m) = m[a] = [ma]$ כלומר $m \mapsto ma \pmod n$ לא צריך להתקיים שום יחס נוסף ולכן כל $a \in \mathbb{Z}_n$ יגדיר הומו' והם יהיו הומו' שונים. ולכן קיימים n הומו' שונים.