

**בחינת סיום (מועד מיוחד) בקורס
מבנים אלגבריים להנדסה (83218)**

מרצה: פרופ' נתן קלר

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

נא לענות על 4 מתוך 5 השאלות. בכל שאלה, סעיף א' שווה 15 נקודות וסעיף ב' שווה 10 נקודות.
חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון בלבד.

בהצלחה!

שאלה 1

א. הוכיחו כי לכל $n > 2$, חבורת התמורות S_n אינה ציקלית.

ב. תנו דוגמא לחבורה ציקלית אינסופית שאיננה $(\mathbb{Z}, +)$.

שאלה 2

א. תהי G חבורה ותהי H תת חבורה שלה. הוכיחו כי אם מתקיים $|G/H| = 2$ אז לכל $g \in G$ מתקיים $gH = Hg$.

ב. תנו דוגמא לחבורה סופית G ותת חבורה שלה H כך שמתקיים $|G/H| = 3$ וקיים $g \in G$ כך ש-
 $gH \neq Hg$ (אתם מתבקשים לספק דוגמא של החבורה G , תת החבורה H והאיבר g , ולהוכיח כי עבורו אכן מתקיים $gH \neq Hg$. אין צורך להוכיח כי G אכן חבורה וכי H אכן תת חבורה אם מדובר בחבורות עליהן למדנו בכיתה.)

שאלה 3

א. יהי R חוג ויהי $x \in R$. הוכיחו כי אם x הוא מחלק אפס שמאלי ב R , אז x אינו הפיך משמאל.

ב. יהי R חוג סופי ויהי $x \in R$. הוכיחו כי אם x הוא מחלק אפס שמאלי ב R , אז x אינו הפיך מימין.

שאלה 4

א. יהיו R_1, R_2 חוגים, ויהי $f: R_1 \rightarrow R_2$ הומומורפיזם של חוגים. נסמן ב- 0 את איבר היחידה החיבורי של R_2 . הוכיחו כי $\text{Ker}(f) = \{x \in R_1: f(x) = 0\}$ הוא אידאל של R_1 .

ב. תנו דוגמא לשני חוגים סופיים שהינם איזומורפיים זה לזה, ולא איזומורפיזם ביניהם.

שאלה 5

א. הוכיחו כי $F = \mathbb{Z}_{11}[x]/\langle x^2 + x + 4 \rangle$ הינו שדה. כמה איברים יש בשדה זה?

ב. האם החבורה הכפלית של השדה $F = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4 + x + 1 \rangle$ (עם הפעולות חיבור וכפל מודולו הפולינום $x^4 + x + 1$) היא ציקלית? אם כן, מצאו יוצר שלה.