

אלגברה מופשטת 3 – תרגיל 9

שאלה 1

יהי $\rho_n = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$ ויהי p ראשוני.

- הראו כי קבוצת שורשי היחידה ה- p -פרימיטיביים היא בסיס ל- $\mathbb{Q}[\rho_p]$ מעל \mathbb{Q} .
- חשבו בעזרת סעיף 1 או בכל דרך אחרת:
 - $[\mathbb{Q}[\rho_7 + \rho_7^2 + \rho_7^4]: \mathbb{Q}]$.a
 - $[\mathbb{Q}[\rho_{11} + \rho_{11}^{-1}]: \mathbb{Q}]$.b
 - $[\mathbb{Q}[\rho_5]: \mathbb{Q}[\rho_5 + \rho_5^3]]$.c
- האם קבוצת שורשי היחידה ה- n -פרימיטיביים היא בסיס ל- $\mathbb{Q}[\rho_n]$ מעל \mathbb{Q} גם כאשר n פריק? נמקו את קביעתכם.

שאלה 2

תהי K/F הרחבת גלואה ו- $\alpha \in K$. הוכיחו כי $K = F[\alpha]$ אם ורק אם לכל $\sigma \in Gal(K/F)$ מתקיים $\sigma\alpha \neq \alpha$. [רמז: גם הרחבת גלואה.]

שאלה 3

שכנעו את עצמכם בעובדה הבאה: $\rho_3 \in \mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{9 + \sqrt{-3}}\right]$.

אתם רשאים להשתמש בפתרון התרגיל בעובדה הבאה: הפולינום המינימלי של $\sqrt[3]{9 - \sqrt{-3}}$ מעל $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{9 + \sqrt{-3}}\right]$ הוא $x^3 - (9 - \sqrt{-3})$.

יהי K שדה הפיצול של $x^6 - 18x^3 + 84$ מעל \mathbb{Q} .

- מצאו את כל האיברים $\sigma \in Gal(K/\mathbb{Q})$ המקיימים $\sigma\left(\sqrt[3]{9 + \sqrt{-3}}\right) = \sqrt[3]{9 - \sqrt{-3}}$. עליכם להציג כל איבר ב-2 דרכים: ע"י תיאור לאן נשלח כל אחד מהיוצרים של ההרחבה K/\mathbb{Q} וע"י התמורה שהוא משרה על שורשי הפולינום $x^6 - 18x^3 + 84$. [המלצה: בדקו מהו $\sigma(\rho_3)$.]
- הראו כי האיברים שמצאתם בסעיף 1 יוצרים את $Gal(K/\mathbb{Q})$. הראו גם כי $Gal(K/\mathbb{Q})$ אינה אבלית, אך היא אינה איזומורפית ל- D_9 (רמז: מצאו תכונה המתקיימת רק עבור D_9).
- האם $K = \mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{9 + \sqrt{-3}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{-3}}\right]$?
- בנוס:** הביעו את $Gal(K/\mathbb{Q})$ ע"י יוצרים ויחסים (לכל היותר שלושה יוצרים). הוכיחו את קביעתכם. (כלומר, הראו שהחבורה המתקבלת מהיוצרים ומהיחסים אכן איזומורפית ל- $Gal(K/\mathbb{Q})$).