תרגיל 5 – פתרון

<u>שאלה 1</u>

א. תהי $\{a_n\}$ סדרה, כך שקיים לה אוסף סופי של תת-סדרות המכסות את הסדרה ומתכנסות לאותו הגבול. הראו כי גם $\{a_n\}$ מתכנסת לאותו הגבול.

<u>פתרון:</u> נניח כי יש k סדרות כאלה, $\{a_{n_1}\},\{a_{n_2}\},\dots,\{a_{n_k}\}$ ושהן מתכנסות ל- $L\in\mathbb{R}$.
נראה כי $\{a_n\}$ מתכנסת ל- L . יהי $\epsilon>0$.
יש N_1 כך שלכל $n_1\geq N_1$ מתקיים .
יש N_2 כך שלכל $n_2\geq N_2$ מתקיים $|a_{n_2}-L|<\epsilon$.
...
יש N_k כך שלכל $n_k\geq N_k$ מתקיים $|a_{n_k}-L|<\epsilon$.
נסמן $N=max(N_1,N_2,\dots N_k)$.

אז לכל $n\geq N$, a_n נמצא לפחות באחת מהסדרות $\{a_{n_1}\},\{a_{n_2}\},\dots,\{a_{n_k}\}$ מההנחה שהן מכסות את $\{a_n\}$, לכן $|a_n-L|<\epsilon$. מש"ל.

ב. הטענה איננה נכונה אם נמחק את המילה "סופי" מהניסוח של סעיף א'. באיזה שלב בהוכחתכם לטענה בסעיף א' השתמשתם בסופיות האוסף?

<u>פתרון:</u>

כמובן זה תלוי במה היתה ההוכחה שלנו בסעיף א'. עבור ההוכחה שנתנו לעיל, בהגדרת N השתמשנו בעובדה שלקבוצה $\{N_1,N_2,\dots,N_k\}$ יש מקסימום. זו היתה הנחה מוצדקת כי זו קבוצה סופית.

ג. הראו כי לסדרה $\{a_n\}=(-1)^n$ קיים אוסף (אינסופי) של תת-סדרות המכסות את הסדרה ומתכנסות כולן לאותו הגבול.

<u>פתרון:</u>

למשל:
$1,2,4,6,\dots$
$3,2,4,6,\dots$
$5,2,4,6,\dots$
$7,2,4,6,\dots$

וכו'.

אגב, כמובן אם נרצה שהסדרות זרות זו לזו (כלומר מכסות את הסדרה המקורית בדיוק) – נוכל לבנות דוגמא כזו גם, כאשר נשנה את הדוגמא לעיל כך שבכל סדרה נקח רק אוסף חלקי של המספרים הזוגיים. (לצורך הפתרון של התרגיל כפי שנוסח כאן אין צורך לעשות זאת – לא נאמר שהן מכסות וזרות, אלא רק מכסות).

<u>שאלה 2</u>

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה $a_n=(-1)^n\left(5-\frac{4}{2^n}\right)$. (שימו לב: הוכיחו כי הגבולות החלקיים שמצאתם הם אכן הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה)

פתרון:

עבור n זוגי נקבל את תת-הסדרה: $a_{2n}=5-\frac{4}{2^{2n}}$, שגבולה 5 .

עבור n אי-זוגי נקבל את תת-הסדרה $a_{2n-1}=-\left(5-\frac{4}{2^{2n-1}}\right)$ שגבולה -5 .

אלה הם הגבולות החלקיים היחידים: כי תהי $\{a_{n_k}\}$ תת-סדרה כלשהי של $\{a_n\}$. מתקיימות אחת מ-3 אפשרויות:

1. אינסוף אינדקסים n_k הם זוגיים, ורק מספר סופי של אינדקסים הם אי-זוגיים. ואז החל ממקום מסוים $\{a_{n_k}\}$ היא תת-סדרה של $\{a_{2n}\}$, וכיוון ש- $\{a_{2n}\}$ מתכנסת, כל תת-סדרה שלה מתכנסת לאותו הגבול, לכן גבול $\{a_{n_k}\}$ גם הוא 5 .
2. אינסוף אינדקסים n_k הם אי-זוגיים, ורק מספר סופי של אינדקסים הם זוגיים. ואז החל ממקום מסוים $\{a_{n_k}\}$ היא תת-סדרה של $\{a_{2n-1}\}$, וכיוון ש- $\{a_{2n-1}\}$ מתכנסת, כל תת-סדרה שלה מתכנסת לאותו הגבול, לכן גבול $\{a_{n_k}\}$ גם הוא -5 .
3. אינסוף אינדקסים n_k הם אי-זוגיים, וגם אינסוף אינדקסים n_k הם זוגיים. אך אז ל- $\{a_{n_k}\}$ יש תת-סדרה שבה כל האינדקסים הם זוגיים, והיא תת-סדרה של $\{a_{2n}\}$, ולפי הטיעון לעיל היא מתכנסת ל- 5 , ובאותו האופן יש תת-סדרה שבה כל האינדקסים הם אי-זוגיים, והיא תת-סדרה של $\{a_{2n-1}\}$, ולפי הטיעון לעיל היא מתכנסת ל- -5 , כלומר זו לא סדרה מתכנסת.