4 תרגול 4

1. תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה שכולה אחדות ($\forall i,j: A_{i,j}=1$). הוכיחו שהיא לכסינה.
פתרון: $rank(A)=1$, לכן 0 ע"ע מריבוי גיאומטרי $n-1$. נראה שיש עוד ע"ע, ולכן ר"א כנ"ל ולכן לכסינה. הוכחתם ש־ $tr(A)$ זה סכום הע"ע. כאן העקבה היא n ולכן סכום הע"ע הוא n כיון ש־0 ע"ע מר"א לפחות $n-1$, נקבל ש־n גם ע"ע.

2. תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו שהממד של $W=span\{I,A,A^2,...\}$ אינו עולה על n.
תנו דוגמא שהוא שווה 1, ודוגמא שהוא שווה n.

(א) פתרון: ממשפט קיילי המילטון כל $A^k\in span\left\{I,\dots,A^{n-1}\right\}$ לכל $k\geq n$ (באינדוקציה).

(ב) $A=I$ הממד =1.

(ג) בעצם $\dim W=d(m_A)=k$. ברור כי $\dim\leq d(m_A)$ כי $W\subseteq span\left\{I,\dots,A^k\right\}$ באופן דומה לפ"א. בכיוון השני $d(m_A)\leq\dim W$ כי אחרת יש ת"ל בפחות ממש מ $\dim W$ גורמים: בפרט הגורמים $\left\{I,A,\dots,A^{\dim W}\right\}$. כלומר יש צ"ל לא טריואלי שמתאפס שממנו ניתן להסיק על פולינום מדרגה קטנה ממש מ k שמתאפס בסתירה למינמ' של m_A. לכן אם נמצא A כך המעלה של פ"א= פ"מ סיימנו. זה קורה למשל אם למטריצה n ע"ע שונים ואז $p_A=m_A=\Pi_{i=1}^{n}x-x_i$ כאשרx_iשונים.

3. עבור מטריצה אידמפוטנטית ($A^2=A$)־ הוכיחו שהיא ניתנת לשילוש. מה האפשרויות עבור $tr(A)$? $m_A|x\left(x-1\right)$ ולכן $p_A=\left(x-1\right)^k x^{n-k}$ ולכן פ"א מל"ל וניתנת לשילוש. בנוסף $tr(A)=\sum_i\lambda_i=\#1=k$

4. $m_A(x)=(x-1)^2$. $f(x)=x^2+4x+3$. הוכיחו ש$f(A)$ הפיכה. הוכחה $f(x)=\left(x+3\right)\left(x+1\right)$. אם $f(A)$ אינה הפיכה אזי 3 או -1 ע"ע אבל הע"ע היחיד של A הוא 1.

(א) מצא את A^{-1}: פתרון $m_A=x^2-2x+1$ ולכן $A^2-2A+I=0$ ואז $A(A-2I)=-I$ ולכן $A^{-1}=-\left(A-2I\right)$.