

25.08.15

88-112 אלגברה לינארית 1 – קורס קיץ תשע"ה

אורך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

הוראות:

- יש לענות על כל 6 השאלות. סה"כ הניקוד המקסימלי 110 נק' (כל ציון מעל 100 יעוגל ל100).
- יש לענות על דפי הבחינה בלבד. ניתן להשתמש במחברת כטיוטה, אך המחברת לא תיבדק כלל.

שאלה	ניקוד
1	
2	
3	
4	
5	
6	
סה"כ	

## חלק א'

1. (20 נק') הוכיחו את המשפט הבא:

יהיו  $V, W$  מרחבים וקטוריים נוצרים סופית, ותהי  $T: V \rightarrow W$  העתקה לינארית.

הוכיחו כי  $\dim \operatorname{Im} T + \dim \operatorname{ker} T = \dim V$

2. (10 נק') תהי  $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  ונגדיר העתקה לינארית  $T: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  על ידי

$$\forall A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}: T(A) = BA$$

הוכיחו כי  $T$  הפיכה אם"ם  $B$  הפיכה.

3. (20 נק') יהי  $V = \mathbb{R}^n$  ויהי  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  בסיס ל  $V$ , ותהי  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  כך שלכל

$$Av_i = v_i \quad 1 \leq i \leq n-1$$

א. הוכיחו/הפריכו:  $Av_n = v_n \Leftrightarrow A = I_n$

ב. הוכיחו כי  $C(A) = \text{span}\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  אם"ם  $A$  אינה הפיכה.

4. (20 נק') נתונה  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  ויהי הבסיס  $B = \{1+x^2, -1+x, x-x^2\}$

ל  $V = \mathbb{R}_2[x]$

א. מצאו במפורש העתקה לינארית  $T$  עבורה  $A = [T]_B^B$

(“במפורש” כלומר נוסחה מהצורה  $T(a+bx+cx^2) = \dots$ .)

ב. מצאו בסיס  $C$  עבורו מתקיים  $A = [I]_C^B$ .

5. (20 נק') תהי  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ . נסמן את מרחב השורות של  $A$  ב  $R(A)$ , את

מרחב העמודות ב  $C(A)$  ואת מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית

$$N(A) = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid Av = 0\}$$

מצאו בסיס ומימד עבור:

א.  $R(A)$

ב.  $C(A) \cap N(A)$

ג.  $C(A) + N(A)$

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_\_

6. (20 נק') .

א. מצאו לאילו ערכי  $a$ , אם בכלל, למערכת המשוואות הבאה מעל המספרים הממשיים יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרונות.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1-a & 1-a & 0 & a^2-a^3 & 1-a \\ 1 & 1 & a-1 & 0 & 1 \\ a & a & 0 & a^3-a^2 & a \end{array} \right)$$

ב. תהי  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  כך ש  $A^T A^2 = -I$ . הביעו את  $adj(A)$  באמצעות  $A$ .

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_\_