1 17.11.13
גלי צפט
תרגול 6

הגדרה: תהי m פונקציה המוגדרת על חוג למחצה Σ_m

כלומר $m:\Sigma_m \to R$. m נקראת מידה אם:

1. לכל $A\in\Sigma_m$, $m(A)$ הוא מספר ממשי ו $m(A)\geq 0$

2. הפונ' m אדיטיבית, כלומר אם $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ו $A, A_i\in\Sigma_m$ ה $i=1...n$

ו $A_i\cap A_j=\emptyset$ לכל $i\neq j$.

אז $m(A)=\sum_{i=1}^{n} m(A_i)$

דוגמא: נבחר את החוג למחצה Σ להיות קבוצת כל הקטעים מהצורה $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b), ונגדיר m להיות:

$$m([a,b])=m((a,b])=m([a,b))=m((a,b))=b-a$$

מניחים $b\geq a$

תרגיל: תהי m מידה המוגדרת על חוג למחצה Σ_m, ויהיו $A,B\in\Sigma_m$ כך ש $B\setminus A\in\Sigma_m$ ו $A\setminus B$, $A\cup B$. הוכיחו ש:

1. אם $A\subset B$ אז $m(B\setminus A)=m(B)-m(A)$

2. $m(A\cup B)=m(A)+m(B)-m(A\cap B)$

פתרון: 1. בעצם צריך להוכיח ש $m(B\setminus A)+m(A)=m(B)$

כיוון ש A ו $B\setminus A$ זרות נקבל ש:

$$m(B\setminus A)+m(A)=m((B\setminus A)\cup A)$$

נשאר להוכיח ש: $(B\setminus A)\cup A=B$ והשוויון נכון כי $A\subseteq B$

2. נפרק את $A\cup B$ לקבוצות זרות ונשתמש באדטיביות

$$A\cup B= A\setminus(B\cap A)\cup B\setminus(B\cap A)\cup A\cap B$$

וזה פירוק של $A\cup B$ לקבוצות זרות

! $A\setminus(B\cap A)$, ! $B\setminus(B\cap A)$! $A\cap B$ כולן שייכות ל Σ לפי ההנחה ולכן:

$$m(A\cup B)= m(A\setminus(B\cap A))+m(B\setminus(B\cap A))+m(A\cap B)$$

מכיוון ש $B\cap A$ מוכלת ב A מסעיף 1 נובע ש-

$m(A\setminus(B\cap A))=m(A)-m(B\cap A)$

$m(B\setminus(B\cap A))=m(B)-m(A\cap B)$ ובאותו אופן

ולכן -

$$m(A\cup B)=m(A)-m(B\cap A)+m(B)-m(B\cap A)+m(A\cap B)$$
$$=m(A)+m(B)-m(B\cap A)$$

17.11.13

אנליזה פונ'
תרגול 6

<u>הגדרה:</u> תהי m. מידה m נקראת σ-אדיטיבית אם לכל סדרה של קבוצות $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ שזרות בזוגות ו- $A_n \in \Sigma$ לכל n ו- $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$ אז:

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

<u>דוגמה:</u> נבנה מידה שאדיטיבית ולא σ-אדיטיבית.
נבחר Σ להיות החוג למחצה המוגדר באופן הבא:

$$\Sigma = \{[a,b]\cap\mathbb{Q},\ (a,b]\cap\mathbb{Q},\ [a,b)\cap\mathbb{Q},\ (a,b)\cap\mathbb{Q} \mid -\infty < a \leq b < \infty\}$$

ו- m נותנת לכל קטע את האורך שלו, כלומר - $m([a,b]\cap\mathbb{Q}) = b-a$

קל לבדוק ש- m מידה.
נוכיח ש- m לא σ-אדיטיבית.
נתבונן בקבוצה $A=[0,1]\cap\mathbb{Q}$. אז A בת מניה ולכן אפשר לרשום:

$$A = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

כלומר, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} [x_i, x_i]$.

נניח בשלילה ש- m σ-אדיטיבית, אז:

$$1 = m(A) = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}[x_i,x_i]\right) \underset{\text{הנחנו σ-אדיטיבית}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} m([x_i,x_i]) = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0$$

$\Leftarrow$ סתירה ולכן m לא σ-אדיטיבית.

<u>טענה:</u> תהי m מידה אדיטיבית σ המוגדרת על חוג σ שסימנו ב- Σ.
נניח כי $A_n, B \in \Sigma$ $n \geq 1$ כאשר A_n זרות בזוגות ומתקיים $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
הוכיחו ש- $\lim_{n\to\infty} m\left(B \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 0$

<u>פתרון:</u> כיוון ש- m אדיטיבית σ נובע ש- $\infty > m(B) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)}_{\text{מתכנס}}$

כלומר הטור $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$ מתכנס ולכן זנב הטור שואף ל-0, כלומר $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} m(A_i) = 0$

לכן -

$$m\left(B \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \underset{\text{אדטיבי}}{=} m(B) - m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) - \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$

$$= \sum_{i=n+1}^{\infty} m(A_i) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

③ 17.11.13

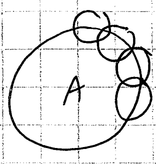
שיעורי בית
תרגיל 6

<u>הגדרה:</u> תהי m מידה המוגדרת על חוג למחצה Σ_m, עם יחידה E שהיא σ אדיטיבית. המספר:

$$\mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) \;\middle|\; A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, B_n \in \Sigma \right\}$$

$[A \subseteq E]$

נקראת המידה החיצונית של הקבוצה A.



הכיסוי הכי קטן שאפשר במובן שאם ניקח את כל ה-B_n
זה יתן את הסכום הכי קטן