מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 2 - פתרון

1. (מהרצאה 2) יהי M מרחב מטרי, x_n סדרת איבריו ו- $a \in M$.
<u>הוכיחו</u> ש- $x_n \to a$ אם"ם לכל סביבה U של a כל אברי הסדרה פרט למספר סופי שלהם מוכלים ב-U .
<u>הוכחה</u>
<u>כיוון 1</u>. נניח $x_n \to a$. ותהי U סביבה של a אזי לפי הגדרת קבוצה פתוחה (סביבה) קיים כדור פתוח $B(a,\varepsilon)$ כך ש- $B(a,\varepsilon) \subseteq U$. לפי קריטריון ההתכנסות כל אברי הסדרה פרט למספר סופי שלהם מוכלים ב- $B(a,\varepsilon)$. אבל כל איבר הסדרה שנמצא מחוץ ל-U נמצא גם מחוץ ל- $B(a,\varepsilon)$. לכן מחוץ ל-U נמצאים לא יותר ממספר סופי אברי הסדרהת מש"ל.
<u>כוון 2</u>. יהי לכל סביבה U של a כל אברי הסדרה x_n פרט למספר סופי שלהם מוכלים ב- U ויהי $\varepsilon > 0$. נקבע $U = B(a,\varepsilon)$: הרי כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה. מזה נובע ש כל אברי הסדרה x_n פרט למספר סופי שלהם מוכלים ב-$B(a,\varepsilon)$ ולכן לפי קריטריון ההתכנסות $x_n \to a$, מש"ל.

2. <u>הגדרה.</u> הפונקציה $D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך ש- $D = \begin{cases} 1, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\notin \mathbb{Q} \end{cases}$, נקראת *פרנקצחה דיריכלה* . ($\mathbb{Q}$-קבוצת מספרים רציונאליים)
<u>הוכיחו</u> שפונקציה דירכלה אינה רציפכ בכל נקודה.
<u>הוכחה</u>
תהי $a \in \mathbb{R}$. נניח – <u>בשלילה</u> – ש-D רציפה ב-a . לכל $n \in \mathbb{N}$
נגדיר x_n כך ש- $a < x_n < a + \frac{1}{n}$ ו- $x_n \in \begin{cases} \mathbb{Q}, & \text{איזוגי } n \\ \mathbb{Q}^c, & \text{זוגי } n \end{cases}$
מההגדרה נובע:
$$|x_n - a| \le \frac{1}{n} \overset{(1)}{\Rightarrow} |x_n - a| \to 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} x_n \to a$$
פה: (1) ההקורסים הקודמים, (2) קריטריון התכנסות מהרצאה.

אבל לכל n מתקיים : $|D(x_n) - D(x_{n+1})| = 1$ כי בזוג (x_n, x_{n+1}) מספר אחד רציונלי והשני – אירציונלי. אזי הסדרה $D(x_n)$ אינה סדרת קושי ולכן לא מתכנבת. זה <u>סותר</u> לקריטריון רציפות D ב-a , מש"ל.

3. יהיו A, B מרחבים מטריים.<u>הוכיחו</u> שהפונקציה $f: A \to B$ רציפה אם ורק אם הקבוצה $f^{-1}(F)$ סגורה לכל קבוצה סגורה $F \subseteq B$.

<u>הוכחה.</u>

לפי משפט מהרצאה f רציפה אם"ם $f^{-1}(U)$ פתוחה לכל קבוצה פתוחה $U \subseteq B$.

<u>כיוון 1</u>. נניח f רציפה ו- F סגורה . אזי $f^{-1}(F) = \left(f^{-1}(F^c)\right)^c$.

אבל F^c פתוחה ולפי המשפט $f^{-1}(F^c)$ פתוחה. לכן לפי השוויון האחרון $f^{-1}(F)$ סגורה, מש"ל.

<u>כיוון 2</u>. נניח הקבוצה $f^{-1}(F)$ סגורה לכל קבוצה סגורה $F \subseteq B$, ותהי U פתוחה. אזי U^c סגורה ולפי ההנחה $f^{-1}(U^c)$ סגורה.

אז $f^{-1}(U^c) = \left(f^{-1}(U)\right)^c$ סגורה ו- $f^{-1}(U)$ *פתוחה. אזי לפי המשפט* f רציפה, מש"ל.

4. <u>תזכורת.</u> מרחב מטרי נקרא "שלם" אם כל סדרת קושי במרחב הזה מתכנסת.

יהיה M מרחב מטרי שלם ותהי $F \subseteq M$ קבוצה סגורה.

<u>הוכיחו</u> שתת מרכב F הוא מרחב מטרי שלם.

<u>הוכחה.</u>

נניח x_n סדרת קושי ב-F . צריך להוכיח שקיימת נקודה $a \in F$ כך ש- $x_n \to a$.

כל האיברים x_n שייכים ל-F . כיוון שמטריקה ב-F מושרה מ-M , x_n סדרת קושי גם ב-M . אבל M מרחב שלם לפי התנאי. לכן קיימת נקודה $a \in M$ כך ש- $x_n \to a$. מכיוון ש- F קבוצה סגורה, $a \in F$. לפי הגדרת מרחב מטרי שלם, F שלם,

5. (מהארצאה 2) <u>הוכיחו</u> ש- הקבוצות

$$U_1 = (0,1) - \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots\right\}$$

$$U_2 = (0,1) - \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots\right\}$$

פתוחות ב- $(0,1)$.

<u>הוכחה.</u>

$(0,1)$ –קבוצה פתחה (כל המרחב).

$$U_1 = (0,1) - \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots\right\} = \left(\frac{1}{3}, 1\right) \cup \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{5}\right) \cup \dots$$

כל קטע כאן פתוחה ב-$\mathbb{R}$ ולכן פתוחה ב- $(0,1)$ כחיתוך אתו (הרצאה).

אזי U_1 פתוחה כאחוד של קבוצות פתוחות ב- $(0,1)$.

$$U_2 = (0,1) - \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots\right\} = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right) \cup \dots$$

כל קטע כאן פתוחה ב-$\mathbb{R}$ ולכן פתוחה ב- $(0,1)$ כחיתוך אתו (הרצאה).

אזי U_2 פתוחה כאחוד של קבוצות פתוחות ב- $(0,1)$.