תורת הקבוצות — תרגיל בית 8
פתרונות

חיים שרגא רוזנר

כ' בסיון, תשע"ה*

תקציר

קבוצות סדורות היטב, הצגה נורמלית של קנטור, פונקציות מחלקה.

תזכורות רנדומליות

1. כל קבוצה סדורה היטב איזומורפית סדר לסודר יחיד.
2. טריכוטומיות סודרים: מתקיימת אחת ורק אחת מהאפשרויות $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ או $\beta < \alpha$.
3. משפט נקודת השבת: תהי $f\colon ON \to ON$ פונקציית סודרים מונוטונית (במובן החזק) ורציפה. אזי יש אינסוף סודרים α עבורם $f(\alpha) = \alpha$. יתרה מזאת, מחלקת הסודרים שהם נקודות שבת של f איננה חסומה במחלקת הסודרים ON.
4. ההצגה הנורמלית של קנטור: יהי $\alpha > 0$ סודר. אזי קיימים $n \in \omega$, $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_n$ ו־$k_1, k_2, \ldots, k_n \in \omega \setminus \{0\}$ יחידים כך ש
$$\alpha = \omega^{\beta_1} k_1 + \omega^{\beta_2} k_2 + \cdots + \omega^{\beta_n} k_n$$
5. חילוק סודרים עם שארית: לכל α, β כך ש־$\beta > 0$ קיימים ויחידים γ, δ כך ש־$\delta < \beta$ ו־$\alpha = \beta\gamma + \delta$.
6. אקסיומת ההחלפה: תהי A קבוצה, ותהי $\varphi(x, y)$ נוסחה, אשר היא כלל התאמה חד־ערכי על איברי A. לשון אחר, לכל $x \in A$ קיים ויחיד y כך ש־$\varphi(x, y)$. אזי האוסף $\{y\colon \exists x \in A, \varphi(x, y)\}$ של תמונת φ הוא קבוצה.

* להגשה עד יום **ראשון** ד' בתמוז (21 יונ') לתא מספר 45 בתאי המילגאים של המחלקה למתמטיקה.

1 תרגילים

1. לכל שתי קבוצות סדורות היטב, מתקיים אחד מהשניים: הן איזומורפיות, או אחת מהן איזומורפית לרישא־ממש של השניה. היעזרו בתזכורות.

פתרון תהיינה A, B שתי קבוצות סדורות היטב. אזי לפי תזכורת 1 ניתן למצוא סודרים α, β איזומורפיים להן. לפי תזכורת 2, מתקיים $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ או $\beta < \alpha$. אם $\alpha = \beta$ אז $A \cong B$. אחרת נניח בה"כ $\alpha < \beta$. אז $\alpha = \overset{\alpha}{\beta}$, ושויון זה משרה את האיזומורפיזם הנדרש בין A לבין רישא־ממש של B. ∎

2. נגדיר ברקורסיה על הטבעיים את הסדרות הבאות:
   - $\alpha_0 = \beta_0 = \omega$.
   - $\alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n}$. $\beta_{n+1} = \beta_n^{\omega}$.

   (א) חשבו את $\sup\{\beta_n : n \in \omega\}$.

   (ב) מסמנים $\epsilon = \sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$. מי מהגבולות יותר גדול?

   (ג) הוכיחו כי ϵ הוא הסודר α הראשון המקיים $\omega^\alpha = \alpha$.

   (ד) האם $\sup\{\beta_n : n \in \omega\}$ הוא הסודר הראשון β המקיים $\beta = \beta^\omega$? מדוע?

פתרון

(א) נחשב את האיברים הראשונים בסדרה:

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \omega\\ \beta_1 &= \omega^\omega\\ \beta_2 &= (\omega^\omega)^\omega = \omega^{\omega\cdot\omega} = \omega^{\left(\omega^2\right)}\\ \beta_3 &= \left(\omega^{\left(\omega^2\right)}\right)^\omega = \omega^{\left(\omega^2\right)\cdot\omega} = \omega^{\left(\omega^3\right)}\end{aligned}$$

ניתן לנחש כי האיבר ה־n בסדרה הוא $\beta_n = \omega^{\left(\omega^n\right)}$, ואז להראות זאת באינדוקציה. אם כן, הגבול של סדרה זו הוא $\omega^{\left(\omega^\omega\right)}$ (הרכבה של פונקציות מונוטוניות ורציפות היא מונוטונית ורציפה).

(ב) לפי האמור בסעיף הקודם, הגבול של הסדרה β_n הוא α_2, ולכן ברור ש־ϵ גדול יותר.

(ג) ברור ש־ϵ הוא גבולי, ולכן $\omega^\epsilon = \sup\{\omega^\gamma : \gamma < \epsilon\}$. מכיוון שפונקציית החזקה (עבור בסיס גדול מ־1) היא פונקציה מונוטונית ורציפה, מתקיים

$$\omega^\epsilon = \sup\{\omega^{\alpha_n} : n \in \omega\} = \sup\{\alpha_n : n \in \omega\} = \epsilon$$

אם כן הראנו ש־ϵ מקיים הדרוש. נותר להראות כי הוא הקטן ביותר המקיים זאת.
נניח בשלילה כי קיים $\eta < \epsilon$ המקיים $\omega^\eta = \eta$. ברור ש־$\omega < \eta$. מכיוון ש־$\eta < \epsilon$, קיים n כך ש־$\alpha_n < \eta \leq \alpha_{n+1}$. מכיוון שהחזקה היא מונוטונית במובן החזק (עבור בסיס גדול מ־1), מתקיים

$$\alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n} < \omega^\eta$$

ביחד מצאנו $\eta \leq \alpha_{n+1} < \omega^{\eta}$, ובסתירה להנחה. הטענה הזו נובעת מהוכחת משפט נקודות השבת לפונקציה מונוטונית ורציפה.

(ד) מתקיים $\sup\{\beta_n : n \in \omega\} = \omega^{(\omega^\omega)}$. העלאה של ביטוי זה בחזקת ω תיתן

$$\left(\omega^{(\omega^\omega)}\right)^{\omega} = \omega^{\omega^\omega \cdot \omega} = \omega^{\omega^{\omega+1}} > \omega^{\omega^\omega}$$

הסיבה להבדל נעוצה בכך שהפונקציה $f(\gamma) = \gamma^{\omega}$ איננה רציפה, ולכן משפט נקודת השבת לא חל עליה. אין נקודות שבת שיקיימו $\beta = \beta^{\omega}$. ■

3. יהי $\alpha > 0$ סודר. אזי התנאים הבאים שקולים:

(א) לכל $\beta, \gamma < \alpha$, גם $\beta + \gamma < \alpha$.

(ב) לכל $\beta < \alpha$, מתקיים $\beta + \alpha = \alpha$.

(ג) לכל $A \subseteq \alpha$, מתקיים $\operatorname{type}(A, \in) = \alpha$ או $\operatorname{type}(\alpha \setminus A, \in) = \alpha$.

(ד) קיים סודר δ עבורו $\alpha = \omega^{\delta}$.

סודר α המקיים תכונות אלו נקרא סודר אי־פריק (indecomposable). הוכיחו <u>לפחות שלוש</u> מהגרירות שבטענה.

פתרון

- (א) ← (ב). נניח $\beta < \alpha$ אזי

$$\alpha \leq \beta + \alpha = \sup\{\beta + \gamma : \gamma < \alpha\} \leq \sup\{\alpha\} = \alpha$$

- (ב) ← (א). נניח $\beta, \gamma < \alpha$. אזי $\beta + \gamma < \beta + \alpha = \alpha$.
- (ב) ← (ד). יהי $\alpha > 0$ המקיים לכל $\beta < \alpha$, $\beta + \alpha = \alpha$. נציג את α על ידי ההצגה הנורמלית של קנטור

$$\alpha = \omega^{\gamma_1} k_1 + \cdots + \omega^{\gamma_m} k_m$$

נזכיר כי הצגה זו היא יחידה.
אורך ההצגה הוא m. נניח בשלילה כי אורך ההצגה כאן ≤ 2, דהיינו $2 \leq m$.
אז נקבל $\alpha = \omega^{\gamma_1} k_1 + \omega^{\gamma_2} k_2 + \cdots$. נבחר $\beta = \omega^{\gamma_1} < \alpha$ ונקבל

$$\beta + \alpha = \omega^{\gamma_1} + \omega^{\gamma_1} k_1 + \omega^{\gamma_2} k_2 + \cdots = \omega^{\gamma_1}(k_1 + 1) + \omega^{\gamma_2} k_2 + \cdots$$

מצאנו כאן כי $\beta + \alpha > \alpha$, סתירה ל־(ב). לכן עבור α, ההצגה היא מאורך 1, דהיינו $\alpha = \omega^{\gamma} k$ ומתקיים $k \in \omega \setminus \{0\}$. נניח בשלילה כי $k > 1$. ניקח $\beta = \omega^{\gamma} < \alpha$, ונקבל $\beta + \alpha = \omega^{\gamma} + \omega^{\gamma} k = \omega^{\gamma}(k+1)$, ושוב $\beta + \alpha > \alpha$. הסיבה לארבעת האי־שוויונות האחרונים היא יחידות ההצגה לפי קנטור. אם כן, מצאנו כי $\alpha = \omega^{\gamma} \cdot 1 = \omega^{\gamma}$, כנדרש.

- (ד) ← (א). נניח כי $\beta, \gamma < \omega^{\delta}$. אם נכתוב אותם לפי הצורה הנורמלית של קנטור נקבל סכום קטן יותר מ־ω^{δ}.
- (ג) ← (ב). נביט בביטוי $\alpha = \beta \cup (\alpha \setminus \beta)$. ברור שהוא שווה α, אבל β רישא ממש של α, ולכן מתקיים $\operatorname{type}(\alpha \setminus \beta) = \alpha$, לפי (ג). מצאנו כי $\beta + \alpha = \alpha$.

- (ד) $\Leftarrow$ (ג). באינדוקציה על δ. עבור $\delta = 0$, נקבל $\alpha = 1$. יש שתי קבוצות ב־$\mathcal{P}(1)$, ומתקיים $A = 1$ או $A = \varnothing$. הטענה מתקיימת.
נראה כעת עבור $\delta + 1$, הסודר העוקב. תהי $A \subseteq \omega^{\delta+1}$. נביט על $\omega^{\delta+1}$ כעל הקבוצה $\omega \times \omega^{\delta}$, ונפרק את A: נגדיר לכל $i \in \omega$, $A_i = A \cap \left(\omega^{\delta} \times \{i\}\right)$.
בעזרת איזומורפיזם סדר טבעי, ניתן להתייחס לכל A_i כעל תת־קבוצה של ω^{δ}, המקיימת את הטענה. לכן, לכל $i \in \omega$, מתקיים $\operatorname{type}(A_i) = \omega^{\delta}$ או $\operatorname{type}(A_i^c) = \omega^{\delta}$, כאשר לוקחים את המשלים מתוך $\omega^{\delta} \times \{i\}$. כמה קבוצות A_i כאלה מקיימות $\operatorname{type}(A_i) = \omega^{\delta}$? אם יש אינסוף קבוצות כאלה, נגדיר את קבוצת האינדקסים שלה להיות $I = \left\{i \in \omega \colon \operatorname{type}(A_i) = \omega^{\delta}\right\}$, ואז $\bigcup_{i \in I} A_i$ קבוצה מטיפוס סדר $\omega^{\delta} \cdot \omega$, והיא מוכלת ב־$A$. לכן גם $\operatorname{type}(A) = \omega^{\delta+1}$, כנדרש. אחרת, יש רק מספר סופי שמקיים $\operatorname{type}(A_i) = \omega^{\delta}$, דהיינו אינסוף קבוצות המקיימות $\operatorname{type}(A_i^c) = \omega^{\delta}$, ואז $\bigcup_{i \in \omega \setminus I} A_i^c$ קבוצה מטיפוס סדר $\omega^{\delta} \cdot \omega$, ומתקיים $\operatorname{type}(A^c) = \omega^{\delta+1}$.
נבדוק כעת את הטענה עבור δ גבולי. לפי ההגדרה, מתקיים $\omega^{\delta} = \sup\{\omega^{\gamma} \colon \gamma < \delta\}$. תהי $A \subseteq \omega^{\delta}$. נביט בקבוצות

$$B = \{\operatorname{type}(A \cap \omega^{\gamma}) : \gamma < \delta\}$$
$$C = \{\operatorname{type}(A^c \cap \omega^{\gamma}) : \gamma < \delta\}$$

לפי הנחת האינדוקציה, לכל $\gamma < \delta$, מתקיים אחד מהבאים: $\operatorname{type}(A \cap \omega^{\gamma}) = \omega^{\gamma}$ או $\operatorname{type}(A^c \cap \omega^{\gamma}) = \omega^{\gamma}$. נניח כעת כי $\sup B < \omega^{\delta}$. לפיכך קיים סודר $\eta < \delta$ עבורו לכל $\gamma < \delta$, $\operatorname{type}(A \cap \omega^{\gamma}) < \omega^{\eta}$. לפי הנחת האינדוקציה, לכל γ כזה מתקיים $\operatorname{type}(A^c \cap \omega^{\gamma}) = \omega^{\gamma}$, ולכן $\sup C = \sup\{\omega^{\gamma} \colon \gamma < \delta\} = \omega^{\delta}$.
הראינו כאן כי $\max\{\sup B, \sup C\} = \omega^{\delta}$. בה"כ $\sup B = \omega^{\delta}$, וכל איבר של B חסום על ידי $\operatorname{type}(A)$, ולכן $\operatorname{type}(A) = \omega^{\delta}$ כמבוקש. ■

4. מצאו דוגמא לסודר α ותת־קבוצה ממש לא ריקה A עבורם:

   (א) $\operatorname{type}(A, \in) + \operatorname{type}(\alpha \setminus A, \in) > \alpha$.

   (ב) $\operatorname{type}(A, \in) + \operatorname{type}(\alpha \setminus A, \in) = \alpha$.

   (ג) $\operatorname{type}(A, \in) + \operatorname{type}(\alpha \setminus A, \in) < \alpha$.

פתרון

(א) ניקח $\alpha = \omega$, A קבוצת הטבעיים הזוגיים. A^c קבוצת הטבעיים האי־זוגיים. נקבל $\omega + \omega > \omega$.

(ב) ניקח $\alpha = 2 = \{0, 1\}$, $A = \{0\}$, $A^c = \{1\}$. נקבל $1 + 1 = 2$.

(ג) ניקח $\alpha = \omega + \omega + 1$, $A = \omega \cup \{\omega + \omega\}$, $A^c = (\omega + \omega) \setminus \omega$. נקבל $(\omega + 1) + \omega = \omega + \omega < \omega + \omega + 1$. ■

5. הוכיחו או הפריכו:

   (א) כל סודר גבולי הוא מהצורה $\sigma\omega$ כאשר σ הוא סודר.

   (ב) כל סודר גבולי הוא מהצורה $\omega\sigma$ כאשר σ הוא סודר.

   (ג) כל סודר גבולי הוא מהצורה $\sigma + \omega$ כאשר σ הוא סודר.

(ד) כל סודר גבולי הוא מהצורה $\omega+\sigma$ כאשר σ הוא סודר.

(ה) קיימים סודרים שונים α,β המקיימים $\bigcup\beta=\bigcup\alpha$.

פתרון יהי γ סודר גבולי כלשהו.

(א) הפרכה: ניקח $\gamma=\omega\cdot 2$. אם $\sigma<\omega$, אז $\sigma\omega=\omega<\omega 2$. אם $\sigma=\omega$ אז $\sigma\omega=\omega\omega=\omega^2>\omega 2$. לכן אין סודר σ שיקיים הנדרש.

(ב) הוכחה: נחלק את γ ב־ω עם שארית, ונקבל $\gamma=\omega\alpha+\beta$, כאשר $\beta<\omega$. אם $\beta>0$ אז β עוקב, וגם γ עוקב, ובסתירה לנתון γ גבולי. מצאנו אפוא $\gamma=\omega\alpha+0=\omega\alpha$.

(ג) הפרכה: ניקח $\gamma=\omega^2$. יחידות ההצגה לפי קנטור מראה שאין σ מתאים.

(ד) הוכחה: נציג את γ בהצגה נורמלית לפי קנטור. מכיוון ש־γ גבולי, החזקה β_n, האחרונה בהצגה, היא חיובית, כי אם $\beta_n=0$ אז קיבלנו סודר עוקב. נביט כעת בחזקה הראשונה בהצגה β_1, ונחלק למקרים:

- $\beta_1=1$. אז לפי מה שאמרנו קודם, האורך n של ההצגה הוא 1. לכן ההצגה היא $\gamma=\omega^1\cdot k_1=\omega k_1$, ומתקיים $k_1>0$. ניקח $\sigma=\omega\left(k-1\right)$, ונקבל

$$\omega+\sigma=\omega\cdot 1+\omega\left(k_1-1\right)=\omega\left(1+k_1-1\right)=\omega k_1=\gamma$$

- $\beta_1>1$. ניקח $\sigma=\gamma$, ואז

$$\omega+\sigma=\omega+\omega^{\beta_1}k_1+\omega^{\beta_2}k_2+\cdots+\omega^{\beta_n}k_n$$

נביט בשני המחוברים הראשונים. מכיוון שהנחנו $\beta_1>1$, מתקיים $\omega+\omega^{\beta_1}k_1=\omega^{\beta_1}k_1$, ולכן כל הביטוי שווה γ.

(ה) לכל סודר שאיננו עוקב α מתקיים $\bigcup S\left(\alpha\right)=\alpha=\bigcup\alpha$. בפרט $0,1$ מקיימים הנדרש. ■

6. תהי $F\colon A\to B$ פונקציית מחלקה חח"ע (דהיינו נוסחא דו־מקומית חד־חד־ערכית בין קבוצות המקיימות A לקבוצות המקיימות B). הוכיחו כי A מחלקה של ממש א.ס.ס. $\operatorname{im}\left(F\right)$ מחלקה של ממש.

פתרון נניח A קבוצה אך התמונה איננה קבוצה. ניתן להגדיר את הקבוצה הבאה בעזרת אקסיומת ההחלפה:

$$\left\{y\colon\exists x\in A,F\left(x\right)=y\right\}$$

כי זהו כלל התאמה חד־ערכי. אך זו התמונה, ולפיכך התמונה היא קבוצה. סתירה. בכיוון השני, נטען את אותה הטענה בדיוק עבור פונקציית המחלקה ההופכית $F^{-1}:\operatorname{im}\left(F\right)\to A$. הפונקציה F^{-1} קיימת (כפונקציית מחלקה) בגלל ש־F היא פונקציה הפיכה כאשר מביטים עליה כפונקצייה מהתחום אל התמונה בלבד. ■

ב ה צ ל ח ה!