נכתב על ידי נועם יערי

משפט (קריטריון קושי להתכנסות סדרות)

סדרה a_n מתכנסת $\Leftrightarrow$ לכל $\epsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < m,n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $|a_n - a_m| < \epsilon$.

הוכחה

$\boxed{\Leftarrow}$

נניח $a_n \to a$. יהי $\epsilon > 0$.

$\frac{\epsilon}{2} > 0$, $a_n \to a$, לכן קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$.

יהיו $N < m,n \in \mathbb{N}$. אז:

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) - (a_m - a)| \le_{\text{אי שוויון המשולש}} |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

$\boxed{\Rightarrow}$

<u>טענה</u>: הסדרה a_n חסומה.

<u>הוכחה</u>: מהנתון, בפרט עבור $\epsilon = 1$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$|a_n - a_m| < 1$. בפרט: $|a_n| - \overbrace{|a_{N+1}|}^{\text{קבוע}} \le_{\text{אי שוויון המשולש}} |a_n - a_{N+1}| < 1$ לכל $N < n \in \mathbb{N}$,

ולכן $|a_n| < 1 + \overbrace{|a_{N+1}|}^{\text{קבוע}}$ לכל $N < n \in \mathbb{N}$. נסמן: $c := max\{|a_1| + 1, \dots, |a_N| + 1, |a_{N+1}| + 1\}$
אז $|a_n| < c$ לכל $N < n \in \mathbb{N}$.

לפי משפט בולצנו ויירשטרס קיימת תת סדרה $a_{m_n} \to a$.

נראה שמתקיים $a_n \to a$: יהי $\epsilon > 0$.

מהנתון, קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N_1 < m,n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}$. $a_{m_n} \to a$, לכן קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N_2 < m,n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $|a_{m_n} - a| < \frac{\epsilon}{2}$. נגדיר:

$N := \max\{N_1, N_2\}$. יהי $N < n \in \mathbb{N}$. הסדרה m_n עולה ממש (לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $m_n < m_{n+1}$, $m_n + 1 \le m_{n+1}$), לכן $n \le m_n$ לכל n. (פורמאלית, הוכחה באינדוקציה על n).

$$|a_n - a| = |(a_n - a_{m_n}) + (a_{m_n} - a)| \le_{\text{אשמ}} |a_n - a_{m_n}|_{N_1 \le N < n \le m_n \to < \frac{\epsilon}{2}} + |a_{m_n} - a|_{< \frac{\epsilon}{2}}$$

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \blacksquare$$

נכתב על ידי נועם יערי

דוגמה

לכל $n\in\mathbb{N}$, נסמן: $a_n:=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ ($1,\frac{3}{2},\frac{11}{6},\dots$). הסדרה a_n מתבדרת. $|a_{2n}-a_n|=a_{2n}-a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\geq n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$. אילו הסדרה הייתה מתכנסת, היה $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n\in\mathbb{N}$ מתקיים: $|a_m-a_n|<\frac{1}{2}$. אולם, עבור $N<n\in\mathbb{N}$, $\overbrace{2\cdot n}^{m}$, נקבל סתירה.

הערה

אם a_n סדרה שאינה חסומה מלעיל אז קיימת תת סדרה שלה כך ש - $a_{m_n}\to\infty$.

הוכחה

יהי $n\in\mathbb{N}$. n אינו חסם מלעיל של הסדרה, לכן קיים m_n טבעי כך ש $n<a_{m_n}$. נוכיח כי $\lim\limits_{n\to\infty}a_{m_n}=\infty$: יהי $M\in\mathbb{R}$. ניקח $M\leq N\in\mathbb{N}$, אז לכל $N<n\in\mathbb{N}$ מתקיים: $\mathrm{M}\leq\mathrm{N}<n<a_{m_n}$ לכן: $\mathrm{M}<a_{m_n}$ לכל $N<n\in\mathbb{N}$.

הבעיה, שלא הוכחנו ש $m_n<m_{n+1}$ לכל n, ואז ייתכן ש a_{m_n} אינה תת סדרה.

<u>תיקון</u>: נגדיר את m_n לפי הסדר: m_1, אח"כ m_2 וכו'. m_1 כנ"ל, כך ש - $1<a_{m_1}$. נניח שהגדרנו את $m_1,\dots m_n$. יהי $M:=max\{|a_{m_1}|,\dots|a_{m_n}|,n\}$. M אינו חסם מלעיל, ולכן קיים אינדקס m_n בסדרה כך ש $M<a_{m_n}$. בפרט, לכל $k\leq m_n$, $|a_k|<a_{m_{n+1}}$ ובפרט $m_n\neq k$. $m_{n+1}\notin\{1,2,\dots,m_n\}$ ולכן $m_n<m_{n+1}$. סוף הבניה.

בפרט, $n<a_{m_n}$ לכל n, וכן: $m_1<m_2<\cdots$. $a_{m_n}\to\infty$ כמו קודם, וזו תת סדרה.

■

הגדרה

תהי a_n סדרה. מספר a הוא **גבול חלקי** של הסדרה אם קיימת תת סדרה $a_{m_n}\to\infty$.

דוגמה

- הגבולות החלקיים של הסדרה $(-1)^n$ הם: $1,-1$. לכל תת סדרה: $(-1)^{m_n}\to a$, בהכרח לבסוף m_n זוגי ($(-1)^{m_n}=1$) או שלבסוף $(-1)^{m_n}=-1$.

- תהי $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ חח"ע ועל. עבור זוג $(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ יהי $x_{(m,n)}=m.n$ המספר הממשי שזו הצגתו העשרונית. למשל: עבור $(3,1415)$ נקבל 3.1415. נתבונן בסדרה $a_n:=x_{f(n)}$. מהם הגבולות החלקיים של a_n?

<u>תשובה</u>: כל מספר ממשי r הוא גבול חלקי של הסדרה. ניתן לכתוב: $r = m.d_1 d_2 \ldots$ כאשר $d_1, d_2, .. \in \{0, \ldots, 9\}, m \in \mathbb{Z}$.

$$r = \lim_{k\to\infty}(m.d_1 \ldots d_k) = \lim_{k\to\infty} x_{(m,d_1,\cdots,d_k)}$$

■