18/07/19

88-235 אנליזת פורייה – מועד א'

מרצה: דר' ארז שיינר משך המבחן: שלוש שעות חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 28 נק' ענו על כל השאלות כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. תהי $f(x)=\frac{\pi}{2}\sin\left(|x|\right)$
   א. הוכיחו כי טור הפוריה של f הינו $1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{n^2-1}\cos(nx)$.
   (העזרו בנוסחא $\sin(a)\cos(b)=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)-\sin(b-a)\right]$).
   ב. חשבו את הטורים $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{n^2-1}$, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2((-1)^n+1)}{\left(n^2-1\right)^2}$.

2. תהי $f(x)\in E$ רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$ בעלת נגזרת רציפה למקוטעין. יהיו טורי הקוסינוסים והסינוסים של f:

$$g(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx), \qquad h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)$$

(כלומר $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(nx)dx$, $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(nx)dx$.)

   א. חשבו את $h(x)+g(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$.
   ב. הביעו את טור הסינוסים של $f(\pi-x)$ באמצעות b_n.

3. יהי $a\in\mathbb{R}$ עבורו $|a|<\pi$ ותהי הפונקציה $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\le a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$
   א. חשבו את טור הפורייה המרוכב של $f(x)$.
   ב. חשבו את $\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{\sin(na)}{\pi n}e^{inx}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(na)}{\pi n}e^{inx}$.

4. ידוע כי התמרת הפורייה של $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ היא $F(s)=\frac{1}{2}e^{-|s|}$.

א. חשבו את התמרת הפורייה של $h(x)=f*f$ (קונבולוציה).

הפונקציה רציפה וחסומה ולכן

$$\mathcal{F}[h]=\mathcal{F}[f*f]=2\pi\mathcal{F}^2[f]=\frac{2\pi}{4}e^{-2|s|}$$

ב. חשבו את $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+(x-y)^2)(1+y^2)}dy$

(הניחו שזו פונקציה רציפה בעלת נגזרת רציפה ושייכת ל G).

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+(x-y)^2)(1+y^2)}dy=f*f=h(x)$$

לפי הפתרון במבחן לדוגמא

$$\mathcal{F}\big[\mathcal{F}[h]\big](x)=\frac{h(-x)}{2\pi}$$

לכן

$$\frac{h(-x)}{2\pi}=\mathcal{F}\left[\frac{2\pi}{4}e^{-2|s|}\right]$$

$$h(-x)=\pi^2\mathcal{F}\big[e^{-2|s|}\big]=\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{\pi\left(1+\left(\frac{x^2}{4}\right)\right)}=h(x)$$