מועד א' – מד"ר – 88-240 – 15/02/23

זמן המבחן: שלוש שעות. חומר עזר: נוסחאון מצורף, מחשבון מותר משקל כל שאלה 22 נק', ענו על כל השאלות.

מרצה: דר' ארז שיינר. מתרגל: מר עומר רוסלר.

1. מצאו פתרון למד"ר $y'+y=xy^2$ המקיים $y(0)=\frac{1}{2}$.

2. מצאו פתרון למד"ר $2xyy'=y^2-1$ המקיים $y(1)=2$.

3. מצאו פתרון כלשהו למד"ר $y''-3y'+2y=e^{3x}\sin(e^x)$.

4. מסה של $m=2kg$ מחוברת לקפיץ בעל קבוע קפיץ k על משטח חסר חיכוך.

כמו כן נתון כי ברגע $t=0$ המסה הייתה ממוקמת כך שהקפיץ היה רפוי, אך מהירותה של המסה לא הייתה אפס.

לבסוף, נתון כי הרגע הבא בו המסה חזרה למיקום בו הקפיץ רפוי הוא $t=\frac{\pi}{2}$.

א. מצאו את קבוע הקפיץ k.

ב. מצאו את גודל מהירות המסה ברגע $t=0$, אם ברגע $t=\frac{\pi}{4}$ המסה הייתה במרחק מטר אחד מנקודת הרפיון.

5. נסמן בD את אופרטור הגזירה, ובI את אופרטור הזהות.

א. עבור $S=xD+I$ מצאו פתרון למד"ר $Sy=e^x$.

ב. עבור $T=(D-I)(xD+I)$ מצאו $y_1,y_2\in\ker T$ כך ש y_1,y_2 בת"ל עבור $x>0$.

ג. מצאו פתרון למד"ר $xy''+(2-x)y'-y=0$ המקיים $y(1)=0,y'(1)=e$.

<u>נוסחאון מד"ר</u>

<u>חלק א' – מד"ר מסדר ראשון:</u>

<u>כתיב דיפרנציאלי</u> – את המד"ר $y' = f(x,y)$ נוכל לכתוב באופן שקול $dy = f(x,y)dx$

<u>מד"ר פרידה</u> – פתרון למד"ר מהצורה $f(x)dx = g(y)dy$ מקיים את המשוואה הסתומה $F(x) = G(y) + C$
כאשר $F(x) = \int f(x)dx$ וכן $G(y) = \int g(y)dy$.

<u>מד"ר הומוגנית</u> – מד"ר מהצורה $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$. נציב $z = \frac{y}{x}$ ונקבל $\int \frac{1}{g(z)-z}dz = \ln|x| + C$. נמצא את z ונציב לקבל $y = xz$.
ניתן להציג את $f(x,y)$ כ$f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ אם ורק אם לכל $\lambda \neq 0$ מתקיים כי $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$.
במקרה זה $f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$

<u>מד"ר לינארית מסדר ראשון</u> – פתרון למד"ר $y' + a(x)y = b(x)$ נתון ע"י הנוסחא

$$y = e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}dx\right)$$

כאשר $A(x) = \int a(x)dx$.

<u>משוואת ברנולי</u> – יהי $n \neq 0,1$, מד"ר מהצורה $y' + a(x)y = b(x)y^n$.
נציב $z = y^{1-n}$ ונקבל את המד"ר $z' + (1-n)a(x)z = (1-n)b(x)$.
נמצא את z ונחלץ $y = z^{\frac{1}{1-n}}$.

<u>מד"ר מדוייקת</u> – מד"ר מהצורה $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$.
הפתרון של מד"ר מדוייקת מקיים את המשוואה הסתומה $F(x,y) = C$ כאשר $F_x = P, F_y = Q$.
שלבי הפתרון:

1. נבדוק אם היא מדוייקת – המד"ר מדוייקת אם ורק אם $P_y = Q_x$.
2. נמצא את F ע"י חישוב אינטגרל $F = \int Pdx + c(y)$.
3. נגזור ונשווה למקדם השני $\frac{\partial}{\partial y}\left(\int Pdx + c(y)\right) = Q$, וכך נמצא את $c(y)$.
4. הפתרון נתון באופן סתום ע"י $F(x,y) = C$.

גורם אינטגרציה – מד"ר מהצורה $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, נחפש גורם אינטגרציה $\mu(x)$ שכפל בו יהפוך את המד"ר למדוייקת.

שלבי התהליך:

1. יש גורם אינטגרציה $\mu(x)$ אם הביטוי $\frac{P_y-Q_x}{Q}$ אינו תלוי בy.
2. במקרה זה, גורם האינטגרציה הוא $\mu(x)=e^{\int\frac{P_y-Q_x}{Q}dx}$.
3. נכפול בגורם האינטגרציה, ונוודא שקיבלנו מד"ר מדוייקת (לא חובה מתמטית, אבל מומלץ מאד).
4. נפתור את המד"ר המדוייקת שקיבלנו.

בעיית קושי למד"ר מסדר ראשון – מציאת פונקציה y המקיימת את המד"ר $y'=f(x,y)$ וכן את תנאי ההתחלה $y(x_0)=y_0$.

המשוואה האינטגרלית – בעיית הקושי שקולה למשוואה האינטגרלית $y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f\big(t,y(t)\big)dt$.

משפט הקיום והיחידות – תהי $f(x,y)$ רציפה ובעלת נגזרת חלקית f_y רציפה בתחום $|x-x_0|\le a, |y-y_0|\le b$.
נסמן בM את החסם של $|f(x,y)|$ בתחום, ונסמן $a'=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\}$.

אזי **קיים** פתרון **יחיד** y לבעיית הקושי $y'=f(x,y)$ עם תנאי ההתחלה $y(x_0)=y_0$ בתחום $|x-x_0|\le a'$.

חלק ב' – נוסחאות פיזיקליות בסיסיות:

משמעות הנגזרות –

1. $y(t)$ מיקום
2. $v(t)=y'(t)$ מהירות
3. $a(t)=y''(t)$ תאוצה

החוק השני של ניוטון - $F=ma$ כאשר F הוא סכום הכוחות, m היא המסה של הגוף, וכן a הוא התאוצה של הגוף

כוח המשיכה של כדור הארץ – עבור גוף "קרוב" לפני כדור הארץ נניח כי כוח המשיכה הוא mg כאשר m היא המסה של הגוף וכן g הוא קבוע תאוצת הכובד של כדור הארץ ($g\approx 9.82\ m/sec^2$).

כוח קפיץ – קפיץ בעל קבוע קפיץ k מפעיל כוח פרופורציונלי למרחק מנקודת הרפיון בכיוון ההפוך.

אם y הוא המיקום ביחס לנקודת הרפיון, אז הקפיץ יפעיל כוח של $-ky$.

<u>חלק ג' – מד"ר מסדר גבוה:</u>

<u>הורדת סדר למד"ר מסדר שני ללא המשתנה</u> – עבור מד"ר מהצורה $y''=f(y,y')$

1. נחפש פונקציה $p(y)$ עבורה $p'p=f(p,y)$.
2. נחפש פונקציה y המקיימת $y'=p(y)$.

<u>מד"ר לינארית</u> – מד"ר מהצורה $y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=b(x)$ נקראת מד"ר לינארית מסדר n.
אם $b(x)=0$ המד"ר נקראת הומוגנית.

<u>בעיית קושי למד"ר לינארית</u> – מציאת פונקציה המקיימת את המד"ר הלינארית מסדר n ואת תנאי ההתחלה

$$y(x_0)=b_0,y'(x_0)=b_1,\dots,y^{(n-1)}(x_0)=b_{n-1}$$

<u>משפט קיום ויחידות</u> – אם המקדמים $a_i(x),b(x)$ רציפים בקטע I אזי קיים פתרון יחיד בקטע I המקיים את בעיית הקושי.

<u>מרחב הפתרונות</u> –מרחב הפתרונות למד"ר הלינארית ההומוגנית מסדר n עם מקדמים רציפים הוא ממימד n.

<u>פתרון כללי למד"ר לינארית</u> – תהי מד"ר לינארית מסדר n עם מקדמים רציפים, יהיו $y_1,\dots,y_n$ בסיס למרחב הפתרונות של המד"ר ההומוגנית ויהי y_p פתרון פרטי למד"ר האי הומוגנית. אזי הפתרון הכללי למד"ר הוא

$$y=y_p+c_1y_1+\cdots+c_ny_n$$

<u>הורונסקיאן</u> – עבור הפוקנציות $y_1,\dots,y_n$ נגדיר את הורונסקיאן

$$W=\det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1{}' & y_2{}' & \cdots & y_n{}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

<u>תלות לינארית של פתרונות</u> – תהי מד"ר לינארית מסדר n עם מקדמים רציפים בקטע I, ויהיו $y_1,\dots,y_n$ פתרונות למד"ר.

אזי הפתרונות ת"ל אם ורק אם הורונסקיאן מתאפס בכל הקטע I.

<u>מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים</u> – הפולינום האופייני של המד"ר $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0=b(x)$ הוא

$$p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

אם $\lambda\in\mathbb{R}$ שורש ממשי של הפולינום האופייני מריבוי k, אזי הוא תורם את הפתרונות

$$e^{\lambda x},xe^{\lambda x},\dots,x^{k-1}e^{\lambda x}$$

למד"ר ההומוגנית.

אם $\lambda=a\pm bi\in\mathbb{C}$ זוג שורשים מרוכבים של הפולינום האופייני מריבוי k כל אחד, אזי הם תורמים את הפתרונות

$$e^{ax}\cos(bx)\,,e^{ax}\sin(bx)\,,xe^{ax}\cos(bx)\,,xe^{ax}\sin(bx)\,,\dots,x^{k-1}e^{ax}\cos(bx)\,,x^{k-1}e^{ax}\sin(bx)$$

למד"ר ההומוגנית.

<u>שיטת הניחוש עבור מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים</u> – עבור המד"ר

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0=(c_0+c_1x+\cdots+c_mx^m)e^{ax}$$

כאשר a שורש של הפולינום האופייני מריבוי k ננחש פתרון פרטי

$$y_p=x^k(d_0+d_1x+\cdots+d_mx^m)e^{ax}$$

עבור המד"ר

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0=(c_0+c_1x+\cdots+c_mx^m)e^{ax}\cos(bx)$$

או המד"ר

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0=(c_0+c_1x+\cdots+c_mx^m)e^{ax}\sin(bx)$$

כאשר $a\pm bi$ שורשים של הפולינום האופייני מריבוי k כל אחד ננחש פתרון פרטי:

$$y_p=x^k(d_0+d_1x+\cdots+d_mx^m)e^{ax}\cos(bx)+x^k(t_0+t_1x+\cdots+t_mx^m)e^{ax}\sin(bx)$$

<u>שיטת וריאצית המקדמים בעזרת כלל קרמר למציאת פתרון פרטי</u> – תהי מד"ר לינארית מסדר n עם מקדמים רציפים בקטע I:

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0=b(x)$$

ויהיו $y_1,\dots,y_n$ פתרונות המהווים בסיס למרחב הפתרונות של המד"ר ההומוגנית. אזי הפונקציה

$$y_p=c_1(x)y_1(x)+\cdots+c_n(x)y_n(x)$$

מהווה פתרון פרטי למד"ר אם לכל i מתקיים כי

$$c_i'(x)=\frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

כאשר

$$A=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

וכן A_i היא המטריצה המתקבלת מA ע"י החלפת העמודה הi בעמודה $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$

<u>טורי טיילור</u> –

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, \qquad a_n=\frac{y^{(n)}(0)}{n!}$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \qquad \frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, \qquad \sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}$$

מערכת מד"ר – עבור מערכת מד"ר מהצורה $\vec{y}^{(n)} = A\vec{y}$, כאשר v_1 ו"ע עם ע"ע מתאים λ_1 של המטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ננחש פתרון $\vec{y} = f \cdot v_1$, ונקבל כי הוא אכן פתרון אם $f^{(n)} = \lambda_1 f$.

משוואת אוילר – משוואת אוילר הומוגנית היא משוואה לינארית מהצורה

$$a_n x^n y^{(n)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

על מנת למצוא את הפתרונות של משוואת אוילר הומוגנית נבצע את השלבים הבאים:

1. נציב $y = x^r$ במשוואה, נצמצם את x^r ונקבל את המשוואה האינדנציאלית.
2. אם $r \in \mathbb{R}$ שורש מריבוי k של המשוואה האינדנציאלית, נקבל את הפתרונות $x^r, \ln(x)\, x^r, \dots, (\ln(x))^{k-1} x^r$
3. אם $a \pm bi \in \mathbb{C}$ שורשים מריבוי k כל אחד של המשוואה האינדנציאלית נקבל את הפתרונות
$x^a \cos(b\ln(x)), x^a \sin(b\ln(x)), \ln(x)\, x^a \cos(b\ln(x)), \ln(x)\, x^a \sin(b\ln(x)), \dots$
$\dots, (\ln(x))^{k-1} x^a \cos(b\ln(x)), (\ln(x))^{k-1} x^a \sin(b\ln(x))$

חלק ד' – התמרת לפלס והדלתא של דירק:

התמרת לפלס - $\mathcal{L}(y) = \int_0^\infty e^{-st} y(t)dt$

התמרות לפלס ידועות –

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(\sin(at)) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}(\cos(at)) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s - a}$$

$$\mathcal{L}\big(\delta(t-a)\big) = e^{-sa}$$

<u>תכונות התמרת לפלס</u> –

יחידות –

אם y_1, y_2 רציפות וכן $\mathcal{L}(y_1) = \mathcal{L}(y_2)$ אזי $y_1 = y_2$.

לינאריות –

$$\mathcal{L}(y_1 + ay_2) = \mathcal{L}(y_1) + a\mathcal{L}(y_2)$$

התמרת הנגזרת הראשונה –

$$\mathcal{L}(y') = s\mathcal{L}(y) - y(0)$$

התמרת הנגזרת –

$$\mathcal{L}\left(y^{(n)}\right) = s^n\mathcal{L}(y) - s^{n-1}y(0) - \cdots - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)$$

נגזרת ההתמרה –

$$\mathcal{L}(ty) = -F'(s)$$

הזזה של המשתנה s- אם $F(s) = \mathcal{L}(y)$ אזי

$$F(s-a) = \mathcal{L}\left(e^{at}y(t)\right)$$

הזזה של המשתנה t- אם $F(s) = \mathcal{L}(y)$ אזי

$$e^{-as}F(s) = \mathcal{L}\left(u(t-a)y(t-a)\right)$$

כאשר $u(t)$ היא פונקצית המדרגה:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$