קישור לרשימות עבור הקורס: http://u.math.biu.ac.il/~kantor/sev75.pdf
$x\in\mathbb{R}^k$, $\|x\|_p$ לכל $1<p<\infty$. זה נורמה.
$\|x\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le k}|x_i|$ זו נורמה על $\mathbb{R}^k$. $|x_i|\le\|x\|_\infty$ לכל i.

$$1<p<\infty, \|x\|_p=\left(\sum_i|x_i|^p\right)^{1/p}\le\left(\sum_{i=1}^k\|x\|_\infty^p\right)^{1/p}=\left(k\|x\|_\infty^p\right)^{1/p}=k^{1/p}\|x\|_\infty$$

מאידך, $\forall i\ |x_i|=\left(|x_i|^p\right)^{1/p}\le\left(\sum_j|x_j|^p\right)^{1/p}=\|x\|_p$
$\|x\|_\infty\le\|x\|_p$
$\boxed{\|x\|_\infty\le\|x\|_p\le k^{1/p}\|x\|_\infty}$ לכל $1<p<\infty$. $\|x\|_\infty\le\|x\|_{p'}\le k^{1/p'}\|x\|_\infty$ עבור $1<p'<\infty$.

$$\|x\|_p\le k^{1/p}\|x\|_\infty\le k^{1/p}\|x\|_{p'}$$

$$k^{-\frac{1}{p'}}\|x\|_{p'}\le\|x\|_\infty\le\|x\|_p$$

כלומר קיימים מספרים קבועים חיובים A,B כך ש-$A\|x\|_{p'}\le\|x\|_p\le B\|x\||_{p'}$ לכל $x\in\mathbb{R}^k$.
אומרים שהנורמות $\|\cdot\|_p$ ו-$\|\cdot\|_{p'}$ שקולות(אקוולנטיות) (נכון לכל $1\le p\le\infty$)

מטריקה(או: פונקציית מרחק)

$\underline{X}$ קבוצה כלשהי $\neq 0$.

הגדרה

מטריקה על $\underline{X}$ היא פונקציה $d:\underline{X}\times\underline{X}\to[0,\infty)$ עם שלושת התכונות הבאות:

1. מוגדרות. $d(x,y)=0$ אמ"ם $x=y$.
2. סימטריות: $d(x,y)=d(y,x)$.
3. אי שוויון המשולש: $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$

מרחב מטרי הוא קבוצה שהוגדרה עליה מטריקה

מרחב נורמי הוא דוגמה של מרחב מטרי

$$(\underline{X},\|\cdot\|)$$

$$\forall x,y\in\underline{X}\ d(x,y)\doteqdot\|x-y\|$$

בסדיקת (3):

$$d(x,y)=\|x-y\|=\|(x-z)+(z-y)\|\leq\|x-z\|+\|z-y\|=d(x,z)+d(z,y)$$

זו המטריקה המושרית ע"י הנורמה.

דוגמה למרחב מטרי

$$\left(\mathbb{R}^k,d_p\right),d_p(x,y)=\|x-y\|_p$$

דוגמה

כל קבוצה חלקית של $\mathbb{R}^k$ עם המטריקה הנ"ל d_p:

מטריקות שקולות

שתי מטריקות d,d' על קב' $\overline{X}$ נקראות שקולות אם קיימים מספרים $0<A,B$ כך ש$Ad'(x,y)\leq d(x,y)\leq Bd'(x,y)$.

למשל המטריקות d_p כולן שקולות על כל קב' חלקית של $\mathbb{R}^k$.

הגדרה

יהי $\left(\overline{X},d\right)$ מרחב מטרי. כדור(פתוח) שמרכזו $x\in\overline{X}$ ורדיוסו $r>0$ הוא הקבוצה $B(x,r)\left\{y\in\overline{X}\middle|d(y,x)<r\right\}$.

נקרא ל$B(x,r)$ גם סביבה של x, או r־סביבה של x.

למשל

ב$\left(\mathbb{R}^2,d_2\right)$, זה עיגול. ב$\left(\mathbb{R}^3,d_2\right)$ זה כדור. ב$\left(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_1\right)$ הכדור נראה כמו ריבוע

הגדרה

יהי $\left(\overline{X},d\right)$ מרחב מטרי ותהי $E\subseteq\overline{X}$. הנקודה $x\in\overline{X}$ נקראת נקודה פנימית של E אם קיים כדור שמרכזו x המוכל בE.

הקבוצה E נקראת פתוחה אם כל נקודותיה הן פנימיות.

משפט

כדור במ"מ הוא קב' פתוחה

הוכחה

נתון הכדור $B(x,r)$. תהי $y\in B(x,r)$. צל"ה: y פנימית.
$d(y,x)<r$
$s\doteqdot r-d(y,x)>0$.
טענה: $B(y,s)\subset B(x,r)$. באמת: אם $z\in B(y,s)$ אזי $d(z,x)\leq\underbrace{d(z,y)}_{<s}+$
$d(y,x)<s+d(y,x)=r\Leftarrow z\in B(x,r)$
אותה הוכחה מראה שהקבוצה $\left\{y\in\underline{X}\middle|d(y,x)>r\right\}$ היא קבוצה פתוחה.

הגדרה

במ"מ, קבוצה E נקראת <u>סגורה</u> אם המשלים של $E(E^c)$ <u>קבוצה פתוחה</u>. $E^c\doteqdot\{x|x\notin E\}$
לכן, לדוגמה, הקבוצה $\overline{B}(x,r)\doteqdot\{y|d(y,x)\leq r\}$ הוא קבוצה סגורה(שם: הכדור <u>הסגור</u> שמרכזו x ורדיוסו r)

נסמן בτ את משפחת <u>כל</u> הקבוצות הפתוחות במ"מ $(\underline{X},d)$.

תכונות

(1) $\underline{X},\emptyset\in\tau$

(2) אם $E_\alpha\in\tau$ לכל $\alpha\in I$, אזי $\bigcup_\alpha E_\alpha\in\tau$:
<u>הוכחה</u>: $E\doteqdot\bigcup E_\alpha\ni x$. $x\in E_\alpha\,(\in\tau)$ עבור α מסויים. לכן x פנימית לE_α. כלומר קיים $B(x,r)\subseteq E_\alpha\subseteq E$ כלומר x פנימית לE. מש"ל.

(3) אם $E_j\in\tau\ (j=1,...n)$, אזי $E=\bigcap_{j=1}^{n}E_j\in\tau$
<u>הוכחה</u>: $x\in E\subset E_j\forall j=1,...n$. x פנימית לE_j(לכל j). ז"א קיים כדור $B(x,r_j)$ המוכל בE_j. נגדיר $r=\min_{1\leq j\leq n}r_j$. אזי $B(x,r)\subset B(x,r)\subset E_j$ לכל $1\leq j\leq n$.

באופן כללי

אם נתונה(על קבוצה שרירותית $\underline{X}$) משפחה τ של קבוצות חלקיות שלה, עם התכונות (1)-(3), קוראים לτ <u>טופולוגיה על $\underline{X}$</u>; $(\underline{X},\tau)$(ז"א $\underline{X}$ עם הטופולוגיה הנתונה) נקרא <u>מרחב טופולוגי</u>, והקבוצות של τ נקראות <u>קבוצות פתוחות</u>(יחסית לτ)

הטופולוגיה שהגדרנו על מרחב מטרי כנ"ל נקראת <u>הטופולוגיה המטרית</u> על המ"מ $\underline{X}$(המושרית ע"י המטריקה הנתונה).

תרגיל

אם d ו־d' מטריקות שקולות על $\underline{\overline{X}}$, אזי הן משרות את אותה הטופולוגיה על $\underline{\overline{X}}$. (ז"א קב' היא פתוחה יחסית ל־d אמ"ם היא פתוחה יחסית ל־d').

הערות

(1') $\underline{\overline{X}},\emptyset$ סגורות

(2') אם E_αסגורות, אזי $\bigcap\limits_{\alpha\in I} E_\alpha$ סגורה

(3') אם E_α סגורות, אזי $\bigcup\limits_{\alpha\in I} E_\alpha$ סגורה

בעזרת חוקי דה מורגן.