$U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi : U \to V$, ω תבנית־k.

$$\varphi^* \omega (t, v_1, \dots v_k) = \omega (\varphi (t), \varphi' (t) v_1, \dots \varphi' (t) v_k)$$

משפט

$$\varphi^* (\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d} (\varphi^* \omega)$$

הוכחה ־שלב 1

$$\omega = x_i$$

$$\mathrm{d}\varphi_i (t) = \mathrm{d}\varphi_i (t)$$

שלב 2

$$\varphi^* (\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j) = \varphi^* (\mathrm{d}x_i) \wedge \varphi^* (\mathrm{d}x_j)$$

$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j (x, h_1, h_2) = \begin{vmatrix} h_1^i & h_2^i \\ h_1^j & h_2^j \end{vmatrix}$$

$$\varphi^* (\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j) (t, v_1, v_2) = \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \left(\varphi (t), \underbrace{\varphi' (t) v_1}_{h_1}, \underbrace{\varphi' (t) v_2}_{h_2} \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} (\varphi' (t_1) v_1)^i & (\varphi' (t_2) v_2)^i \\ (\varphi' (t_1) v_1)^j & (\varphi' (t_2) v_2)^j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_k} v_1^k & \sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_k} v_2^k \\ \sum_{l=1}^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_l} v_1^l & \sum_{l=1}^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_l} v_2^l \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{k,l=1}^m \frac{\partial \varphi_i (t)}{\partial t_k} \cdot \frac{\partial \varphi_j (t)}{\partial t_l} \begin{vmatrix} v_1^k & v_2^k \\ v_1^l & v_2^l \end{vmatrix} = \sum_{k,l=1}^m \frac{\partial \varphi_i (t)}{\partial t_k} \cdot \frac{\partial \varphi_j (t)}{\partial t_l} \mathrm{d}t_k \wedge \mathrm{d}t_l =$$

$$= (\mathrm{d}\varphi_i) \wedge (\mathrm{d}\varphi_j) = \varphi^* (\mathrm{d}x_i) \wedge \varphi^* (\mathrm{d}x_j)$$

הערה

$$\varphi^*(f\omega)=\varphi^*(f)\,\varphi^*(\omega)=f(\varphi(t))\,\varphi*(\omega)$$

שלב 4

ω תבנית־0. $\omega=f$

$$\mathrm{d}f=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$$

$$\varphi^*(\mathrm{d}f)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t))\,\varphi^*(\mathrm{d}x_i)=\mathrm{d}(f(\varphi(t)))=\mathrm{d}(\varphi^*f)$$

$$\varphi^*(\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n)(t;v_1,\dots v_n)=$$

$$=(\varphi'v_1)^1(\varphi'v_1)^2\cdots(\varphi'v_1)^n\cdots(\varphi'v_n)^1(\varphi'v_n)^2\cdots(\varphi'v_n)^n=$$

$$=\det\varphi'(t)\left(v_1^1v_1^2\cdots v_1^n\cdots v_n^1v_n^2\cdots v_n^n\right)$$

שלב 5 ־ מקרה כללי

$$\omega=\omega_{i_1\dots i_k}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$$

$$\varphi^*\omega=\omega_{i_1\dots i_k}(\varphi(t))\,\varphi^*(\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k})=$$

$$=\omega_{i_1\dots i_k}(\varphi(t))\,\varphi^*(\mathrm{d}x_{i_1})\wedge\cdots\wedge\varphi^*(\mathrm{d}x_{i_k})=$$

$$=\omega_{i_1\dots i_k}(\varphi(t))\,\mathrm{d}\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\varphi_{i_k}$$

$$d(\varphi^*\omega)=\mathrm{d}(\omega_{i_1\dots i_k}(\varphi(t)))\wedge\mathrm{d}\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\varphi_{i_k}$$

ω ־ תבנית־n על $\mathbb{R}^n$

$$\omega=f\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$$

נניח $f:U\to\mathbb{R}$, $U\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה.

הגדרה

תהי $U \subset A$ קבוצה מדידה. אזי האינטגרל של תבנית־n ω מעל A מוגדר ע"י

$$\int_A \omega = \int_A f(x)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n$$

נניח $U, V \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi : V \to U$ דיפאומופיזם, $\varphi(v) = u$

למה

$$\int_V \varphi^* \omega = \pm \int_U \omega$$

כאשר "+" אם $\det \varphi' > 0$ ו"-" אם $\det \varphi' < 0$.

$$\int_U \omega = \int_U f(x)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \int_V f(\varphi(t))\left|\det \varphi'(t)\right|\,\mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_n$$

$$\int_V \varphi^* \omega \overset{\substack{\text{according}\\ \text{to}\\ \text{lemma}}}{=} \int_V f(\varphi(t)) \det\left[\varphi'(t)\right]\,\mathrm{d}t_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_n =$$

$$\overset{\substack{\text{by}\\ \text{definition}}}{=} \int_V f(\varphi(t)) \det\left[\varphi'(t)\right]\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2 \ldots \mathrm{d}t_n$$

הגדרה

תהי $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. התומך של f מוגדר ע,י

$$\mathrm{supp} f = \overline{\{x | f(x) \neq 0\}}$$

נניח שf(או ω) עם תומך קומפקטי - $\{x | f(x) \neq 0\}$ חסומה.

נניח ש$M \subset \mathbb{R}^n$ משטח k־ממדי.

נניח שω תבנית־k על M:

$$\omega = \omega(x; h_1, \ldots h_k)$$

לכל $x \in M$, $(h_1, \ldots h_k) \in T_x(M)$ - כלומר לכל x מקבלים פונקציה מולטילינארית חילופית, והווקטורים $h_1, \ldots h_k$ שייכים למרחב $T_x(M)$.

נניח שω עם תומך קומפקטי $\mathrm{supp}\omega$.

נניח שקיימת מפה (F, Ω): $U = F(\Omega) \subset \mathrm{supp}\omega$.

הגדרה

אם $F(\Omega) = U \subset \text{supp}\omega$ אזי האינטגרל של ω מעל U מוגדר ע"י

$$\int_U \omega = \int_\Omega F^*\omega$$

- ω ־ תבנית־k על $\mathbb{R}^n$
- $F^*\omega$ ־ תבנית־k על $\mathbb{R}^k$

נניח (Ω_1, F_1) מפה. $\Omega_1 \to \Omega : F^{-1}(F_1)$ דיפאומורפיזם.
נניח $\det\left(\left(F^{-1}F\left(_1\right)\right)'\right) > 0$

$$\int_\Omega F^*\omega = \int_{\Omega_1} \left(F^{-1}(F_1)\right)^*(F^*\omega) \overset{\overset{F\left(F^{-1}(F_1)\right)=F_1}{\uparrow}}{=} \int_{\Omega_1} F_1^*\omega$$

נניח שΓ עקום ב$\mathbb{R}^k$ ־ כלומר ניתן לתאר אותו באמצעות מפה אחת:

$$\Gamma = \{\gamma(t) | (a,b) \to \mathbb{R}^n\}$$

$$U = \Gamma \qquad \Omega = (a,b)$$

$$F = \gamma$$

$$\gamma^*\omega = \sum_{i=1}^n \gamma^*\omega_i\gamma^*(\mathrm{d}x_i) == \sum_{i=1}^n \omega_i(\gamma(t))\,\mathrm{d}\gamma_i(t) = \sum_{i=1}^n \omega_i(\gamma(t))\,\gamma_i'(t)\,\mathrm{d}t$$

הגדרה

אינטגל קוי של תבנית־1 ω מעל Γ מוגדר על ידי

$$\int_\Gamma \omega = \sum_{i=1}^n \int_a^b \omega_i(\gamma(t))\,\gamma_i'(t)\,\mathrm{d}t$$

דוגמה

$\int_\Gamma x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$ כאשר Γ האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ עם אוריינטציה נגד כיוון השעון.
קודם כל מוצאים פרמטריזציה:

$$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

ואז

$$\int_\Gamma x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \left[a\cos t\,(b\cos t) - b\sin t\,(-a\sin t)\right]\,\mathrm{d}t = 2\pi ab$$

עוד דוגמה

$$\int_\Gamma xy\,\mathrm{d}y$$

Γ פברולה עם אוריינטציה עם כיוון השעון(כלומר בכיוון השלילי של ציר הx). במקום לבנות פרמטריזציה עם האוריינטציה הנכונה, יותר פשוט לחשב אינטגרל לאוריינטציה ההפוכה(שהיא האוריינטציה הסטנדרטית) ולהפוך אחרי זה את תוצאת האינטגרל.

$$\Gamma^- : \qquad \gamma(t) = \left(t, t^2\right) \qquad t \in [-2, 2]$$

$$\int_\Gamma xy\,\mathrm{d}y = -\int_{\Gamma^-} xy\,\mathrm{d}y = -\int_{-2}^{2} t^3\,(2t)\,\mathrm{d}t = -4\int_0^2 t^4\,\mathrm{d}t = -\frac{128}{5}$$

עבור משטחים

נניח שS משטח 2־ממדי ב$\mathbb{R}^3$,

$$S = \{r(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) | (u,v) \in D\}$$

$$\omega = P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$U = S \qquad \Omega = D \qquad F = r$$

$$r^*(R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y) = R(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v))\,r^*(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$$

$$r^*(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v = \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$$

הגדרה

אינטגרל משטחי של ω מוגדר על ידי

$$\int_S R(x,y,z)\ \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iint_D R(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$\int_S P(x,y,z)\ \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\iint_D P(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$\int_S Q(x,y,z)\ \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\iint_D Q(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\frac{\partial(\chi,\varphi)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

לשים $\heartsuit$: עבור Q, $z(\chi)$ בא לפני $x(\varphi)$ - וזה צריך לבוא לידי ביטוי בכל חלקי הביטוי(תבנית, גזירה, דטרמיננטה וכו')

דוגמה

$$\int_S \frac{1}{x}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\frac{1}{y}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\frac{1}{z}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

כאשר S אליפסואיד $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

$r(u,v)$: $r'_u\times r'_v$ פונה בחוץ.

$$r(u,v)=(a\cos u\cos v, v\sin u\cos v, c\sin v)$$

$$u\in[0,2\pi], v\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

מקבלים ווקטור, ואם הרכיב הקשור לz(הרכיב השלישי) חיובי - אז זה פונה בחוץ.