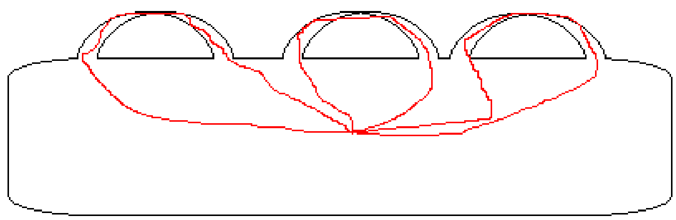
מבנה CW

...
כאשר מסתכלים על מרחב טופולוגי, אפשר להסתכל רק על ה"מסלולים" שלו - כי הם נסג עיוותי של המרחב כולו.
nT:...

nP

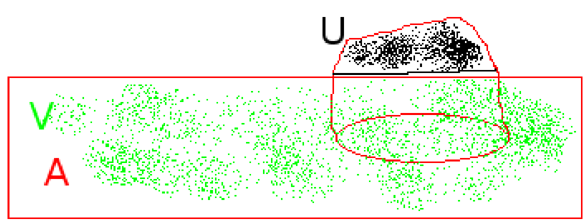
ניקח לדוגמה את $3P$. כבר ראינו שזה אם קורעים בו חור בצורת דיסק זה שקול טופולוגית



ל . אבל עכשיו נראה

ן את הדיסק בחזרה לא רק על השפה - אלא גם על המסלול:
- ולכן גם כשמדביקים את הדיסק זה המרחב שמתקבל.
זהו מבנה CW, ומהמבנה הזה בלבד אפשר לחשב את החבורה היסודית.

ניקח את D^l - הדיסק הl מימדי. ניקח $l=3$. נראה איך בונים אותו מהמימדים שלו:
ניקח את השלד שלו - K^{l-1} - ונדביק לו דיסקים l מימדיים. מה קורה כאשר מדביקים



לו עוד דיסק l מימדי?

$$\pi_1\left(U\right)=1$$

$$\pi_1\left(V\right)=\pi_1\left(A\right)$$

טענה: A נסק עיוותי של V.

$U\cap V\cong S^{-1}$ לכן אם $l=3$ אז $\pi_1\left(U\cap V\right)=1$.

$$\pi_1\left(A\right)\underset{\{1\}}{*}\{1\}=\pi_1\left(A\right)$$

לכן על דיסקים ממימד 3 ומעלה לא צריך לחשוב(כי הוספת דיסקים לשלד לא משנה את החבורה היסודית). אבל מה קורה עם ממדים יותר נמוכים? מה משרה ההכלה על השלד הקודם?

נסתכל על שלד אפס ממדי - כלומר מרחב CW חד מימדי - כלומר על גרף. גרף קשיר בלי מעגלים נקרא עץ. עץ הוא כוויץ - נראה שבעצם עצים הם הגרפים הכוויצים היחידים. נחשב את החבורה היסודית של גרפים באופן כללי - ונגיע למסקנה שגל גרף כוויץ הוא עץ.

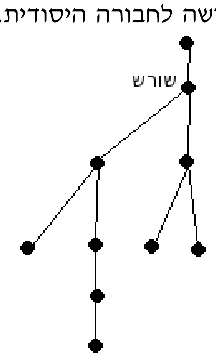
הגדרה: יהי G גרף. $T\subseteq G$ נקרא עץ פורש אם T תת גרף שכולל את כל הקודקודים והוא עץ.

טענה: לכל גרף קשיר יש עץ פורש.

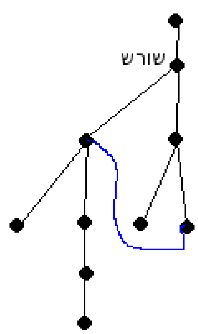
הוכחה: נבחר קודקוד כלשהו שיהיה השורש, ונמתח ממנו מסלולים לכל הקודקודים האחרים.

הערה: מבחינה טופולוגית, אפשר להוסיף קודקודים באמצע של הקשתות - אבל כאן אנחנו כן זוכרים את הקודקודים המקוריים.

מעבר לעץ הפורש יש בגרף עוד צלעות. נפעיל את משפט ואן־קמפן כדי לראות מה התוספת הזאת עושה לחבורה היסודית.



- נוסיף לזה מעגל:



. נבחר את U להיות המעגל כולל השורש, ואת V להיות הגרף לפני הוספת המעגל(כמובן, צריך להוסיף זנבות כי הקבוצות חייבות להיות פתוחות, אבל לא צריך להתעסק עם זה כאן).

U שקול הומוטופית למעגל, וV שקול למה שהיה לנו לפני שהוספנו את הצלע(בציור זה עץ, אבל כאשר מוסיפים עוד מעגלים V יכול להיות משהו יותר מורכב). כלומר:

$$\pi_1\left(U\right)=F_1\qquad\pi_1\left(V\right)=\pi_1\left(A\right)$$

(כאשר A זה מה שהיה קודם)

$$\pi_1\left(U\cap V\right)=1$$

$$\pi_1\left(A\cup\text{closing edge}\right)=\pi_1\left(A\right)*F_1$$

כלומר בכל פעם שסוגרים מעגל מכפילים בעוד F_1, ולכן

$$\pi_1\left(\mathrm{Graph}\right)=F_k$$

כאשר k הוא מספר הצלעות שאינן בעץ הפורש.

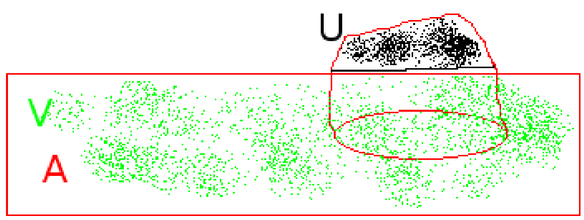
k ניתן לחישוב מתוך d_0 ו-d_1, כי מספר הצלעות בעץ הפורש הוא d_0-1 ולכן $k=d_1-(d_0-1)=d_1-d_0+1$.

משפט

יהי G גרף קשיר עם d_0 קודקודים(תאים 0 מימדיים) ו-d_1 צלעות(תאים 1 ממדיים). אזי

$$\pi_1\left(G\right)=F_{d_1-d_0+1}$$

לא רק שאנחנו יודעים מהי החבורה, אנחנו יודעים גם מהם היוצרים. בכל פעם שסוגרים מעגל מקבלים לולאה(עד השורש) שהיא יוצר - כלומר אם הצלע שנוצרה היא ab, אז היוצר הולך דרך העץ המקורי מהשורש ל-a, משם ל-b דרך הצלע החדשה, ואז חזרה לשורש דרך העץ המקורי. בעצם, בחירת העץ ובחירת הכיוונים על הצלעות נותנת לנו בחירה של היוצרים.

נחזור ל 

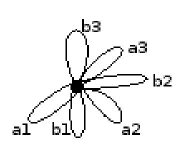
.

$$\pi_1\left(U\right)=1\qquad\pi_1\left(U\cap V\right)=F_n\qquad\pi_1\left(V\right)=\text{what we had before}$$

בכל פעם שמדביקים דיסק נסתכל מה זה מוסיף לנו, ונוסיף את זה כיחס נוסף.

כשמסתכלים על מסלול בגרף ורוצים לדעת מה המילה שלו, צריך פשוט להסתכל על ההחלקים של המסלול שנמצאים על הצלעות שאינן בעץ הפורש ועל הכיוון שם, להמיר ליוצרים(כזכור, כל צלע כזאת מוסיפה יוצר) - וזוהי המילה של המסלול.

דוגמה

nT: 

. יש כאן קודקוד בודד ו6 מסלולים. כאשר מדביקים את הדיסק מקבלים שהמעבר עליו הוא $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\cdots$, ולכן החבורה היסודית היא:

$$\left\langle a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3\middle|a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2\cdots b_3^{-1}\right\rangle$$

סימון

אם A מ"ט ו$\varphi : \partial D^n \to A$ העתקה רציפה, נסמן $A\coprod\limits_{\varphi} D^n$ את המרחב המתקבל מהדבקת ∂D^n לA לפי φ.

משפט (א)

יהי $\varphi, \psi : \partial D^n \to A$. אם $\varphi \sim \psi$ אז $A\coprod\limits_{\varphi} D^n \simeq A\coprod\limits_{\psi} D^n$.

דוגמאות

מרחב משקפיים ־ אפשר לתאר אותו בתור מרחב CW עם שני קודקודים ו2 מעגלים. אפשר גם לתאר אותו בתור עיגול עם קו $\coprod\limits_{\varphi}$ עם D^1

משפט (ב)

יהי $h : A \to B$ שקילות הומוטופית ו$\varphi : \partial D^n \to A$. אזי $A\coprod\limits_{\varphi} D^n \simeq B \coprod\limits_{h \circ \varphi} D^n$. (השקילות ההומוטופית היא ההעתקה המושרה ע"י h וId_{D^n})

משפט(מסתמך על משפט א)

יהי G גרף קשיר עם d_0 וd_1 כנ"ל. אזי

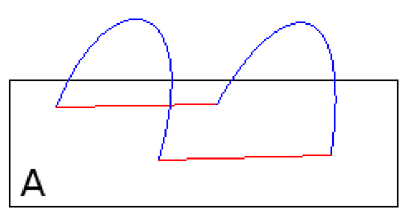
$$G \simeq S^1 \vee S^1 \vee \cdots \vee S^1$$

($\vee$ זה הדבקה בנקודה אחת של כמה מעגלים)

סיכום ביניים

אם מדביקים תאים על מרחב כוויץ זה כמו להדביק אותם על נקודה בודדת.

הוכחה למשפט א'



־ שני דיסקים (בציור ־ חד מימדיים)(כחול), שיש הומוטופיה(אדום) על A בין השפות שלהן(השפות הן φ, ψ ־ ובמקרה החד מימדי בעצם

נקודות בודדות).

$$H : \partial D^n \times I \to A$$

$$\begin{matrix} H(x,0) = \varphi(x) \\ H(x,1) = \psi(x) \end{matrix}$$ לכל $x \in \partial D^n$.