אנחנו רוצים לפתח את $K(\sin\frac{1}{2}\Theta_0)$ עבור $\Theta_0 <<1$

$$K(z)\underset{z\to 0}{\sim}$$

$$K(z)=\int_0^{\pi/2}\frac{ds}{\sqrt{1-z^2\sin^2 s}}\underset{z\to 0}{\approx}\int_0^{\pi/2} 1+\frac{1}{2}z^2\sin^2 s\, ds$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-y}}\underset{y\to 0}{\approx}1+\frac{1}{2}y$$

$$K(\sin\tfrac{1}{2}\Theta_0)\approx\int_0^{\pi/2}\left(1+\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\Theta_0)^2\sin^2 s\right)ds$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\Theta_0\sim\tfrac{1}{2}\Theta_0$$

$$T=4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\left(1+\frac{\Theta_0^2}{8}\sin^2 s\right)ds$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}+4\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{\Theta_0^2}{8}\int_0^{\pi/2}\sin^2 s\,ds$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2 s\,ds=\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2s}{2}ds=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos 2s\,ds$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}+\underbrace{\boxed{\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{\Theta_0^2}{8}\pi}}_{\text{האיבר החדש}}$$

הרצאה 8

יהי פוטנציאל כללי ואנחנו לוקחים קירוב

$$U(q)\approx U(q^*)+0+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\Big|_{q=q^*}(q-q^*)^2$$

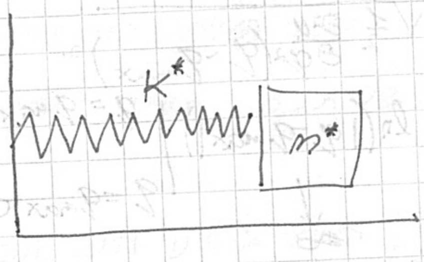
$$\frac{\partial U}{\partial q}\Big|_{q=q^*}$$

E = אנרגיה קינטית + אנרגיה פוטנציאלית

$$E=\frac{1}{2}m^*\dot{q}^2+\frac{1}{2}k^*q^2+U(q^*)$$ ← קבוע נזניח

$$k^*=\left|\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q=q^*=0}$$

$$E=\frac{1}{2}m^*\dot{q}^2+\frac{1}{2}k^*q^2$$



$$\frac{T}{4}=\sqrt{\frac{m^*}{2}}\int_0^{q_{max}}\frac{dq}{\sqrt{E-\frac{1}{2}k^*q^2}}$$

$$T=4\sqrt{\frac{m^*}{2}}\int_0^{q_{max}}\frac{dq}{\sqrt{\frac{1}{2}k^*q_{max}^2-\frac{1}{2}k^*q^2}}$$

$$T=4\sqrt{\frac{m^*}{2}}\int_0^{q_{max}}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}k^*q_{max}^2}}\frac{dq}{\sqrt{1-(q/q_{max})^2}}$$

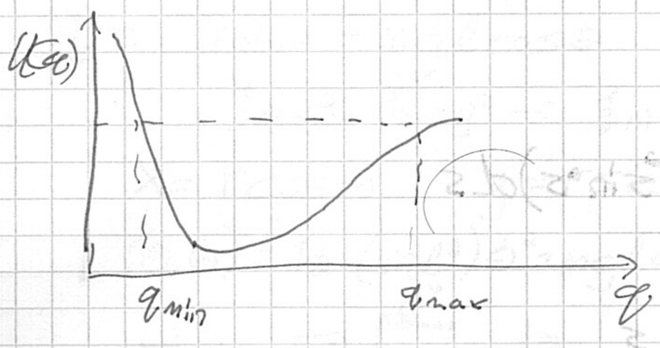
והפתרון הסופי הוא

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m^*}{k^*}}$$

$$t = \sqrt{\frac{m^*}{2}}\int \frac{dq}{\underbrace{\sqrt{E-\frac{1}{2}k^*q^2}}_{\arcsin}} + const$$

$$q \sim \sin(At+B)$$

שאלה:



$$E = U(q_{max})$$

מה הזמן במעבר בין $q_{min} \to q_{max}$

$$t = \sqrt{\frac{m^*}{2}}\int_{q_{min}}^{q_{max}} \frac{dq}{\sqrt{E-U(q)}} = \sqrt{\frac{m^*}{2}}\int_{q_{min}}^{q_{max}-\delta} \frac{dq}{\sqrt{E-U(q)}} + \cancel{\sqrt{\frac{m^*}{2}}\int_{q_{max}-\delta}^{q_{max}} \frac{dq}{\sqrt{E-U(q)}}}$$

$\delta \ll 1$ זה שואף כל כך

$$\underbrace{\boxed{\sqrt{\frac{m^*}{2}}\int_{q_{max}-\delta}^{q_{max}} \frac{dq}{\sqrt{E-U(q)}}}}_{(**)} \longrightarrow \infty$$

$$(**) = \quad E = U(q_{max})$$

$$U(q) \approx U(q_{max}) - \frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right|_{q=q_{max}} (q-q_{max})^2$$

$$(**) = \sqrt{\frac{m^*}{2}}\int_{q_{max}-\delta}^{q_{max}} \frac{dq}{\sqrt{U(q_{max}) - U(q_{max}) + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right|(q-q_{max})^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{m^*}{2}}\int_{q_{max}-\delta}^{q_{max}} \frac{dq}{\sqrt{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}(q-q_{max})^2}}$$

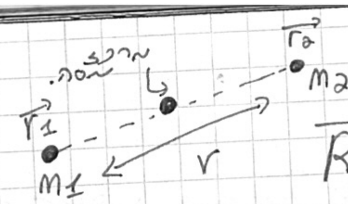
$$= -\sqrt{\frac{m^*}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right|}} \underbrace{\ln(|q-q_{max}|)}_{\infty}\Bigg|_{q=q_{max}-\delta}^{q=q_{max}}$$

הטעם הוא שיש משחק בין הכוח שבקטע ל"כבור" שלנו.

בעיית שני גופים

כל בעיית שני גופים ניתן לי"ג ע"י שתי תנועות:

1) תנועת מרכז המסה. 2) תנועה יחסית



$\vec{R}, \vec{r}$

$$L = \frac{m_1}{2}(\dot{\vec{r_1}})^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{\vec{r_2}})^2 - U(|\vec{r_1} - \vec{r_2}|)$$

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1+m_2}, \quad \vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_2}$$

נבחר מערכת צירים אינרציאלית כך ש $\vec{R}=0$ ולא משתנה עם הזמן.

$$\vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_2}$$

$$m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} = 0$$

$$\vec{r_1} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \; ; \; \vec{r_2} = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$$

$$L = \frac{m_1}{2}\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(-\frac{m_1}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}\right)^2 - U(r)$$

$$L = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)^2}\dot{\vec{r}}^2(m_1+m_2) - U(r)$$

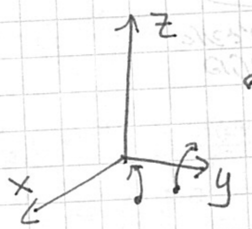
$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(r)$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \leftarrow \text{מסה מצומצמת}$$

זאת בעיה של כוח מרכזי $U(r)$ תלוי רק במרחק מראשית הצירים!

$$U(r) \longrightarrow F(r) = ? = -\frac{\partial U}{\partial r}\hat{r}$$

המערכת לא משתנה ע"י סיבובים



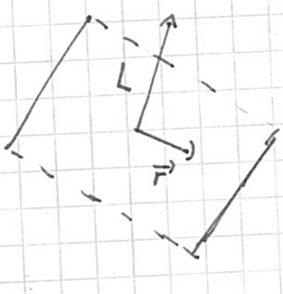
סיבוב סביב כל ציר שהצירים לא משנים את הבעיה.

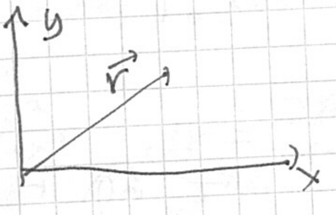
ולכן בגלל משפט נתר ובגלל הדברים שאמרנו לעיל התנע הזויתי כוקטור הוא נשמר (כי היטל על כל ציר נשמר)

שימור של תנע זוויתי עקב סימטרי של $U(r)$ [שים לב: התנע הזויתי נשמר במערכת המעבדה].

$$Const = \vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$$

כיוון ש $\vec{L}$ קבוע בכיוונו והוא אנכי ל $\vec{r}$ (עפ"י הגדרה), $\vec{r}$ מוכרח להיות במישור האנכי ל $\vec{L}$.





$$L=\frac{1}{2}\mu\dot{x}^2+\frac{1}{2}\mu\dot{y}^2-U(r)$$

$$L=\frac{\mu}{2}\dot{r}^2+\frac{\mu}{2}(r\dot{\theta})^2-U(r)$$

$P_\theta \leftarrow$ ציקלית

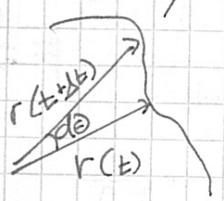
$$P_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\text{Const}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\mu r\dot{\theta} \qquad \frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mu r^2\dot{\theta}\right)=0$$

$$\mu r^2\dot{\theta}=\text{const}=L_z$$



$$dA=\frac{1}{2}r\,r\,d\theta$$

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{2}r^2\frac{L_z}{\mu r^2}$$

$$\frac{dA}{dt}=\frac{L_z}{2\mu} \leftarrow$$ קצב כיסוי שטחים קבוע

לפי נתר בגלל שהלגרנז'יאן לא תלוי בזמן האנרגיה נשמרת

$$E=\frac{\mu}{2}\dot{r}^2+\frac{\mu}{2}(r\dot{\theta})^2+U(r)=\underbrace{\frac{\mu}{2}\dot{r}^2+\frac{L_z^2}{2\mu r^2}}_{\text{אנרגיה קינטית}}+\underbrace{U(r)}_{\text{אנרגיה פוטנציאלית}}$$

$$\mu r^2\dot{\theta}=L_z$$

$$E=\frac{\mu}{2}\dot{r}^2+\underbrace{\left(\frac{L_z^2}{2\mu r^2}+U(r)\right)}_{U_{eff}(r)}$$

$$t=\sqrt{\frac{\mu}{2}}\int\frac{dr}{\sqrt{E-U_{eff}(r)}}+\text{Const}$$