תרגיל מספר 7 מבנים אלגבריים

1 בינואר 2017

1. יהא R חוג. הוכח את הבאים:

   (א) לכל $a \in R$ מתקיים $-(-a) = a$
   פתרון : צ"ל להוכיח כי $(-a) + a = 0$ וזה מתקיים לפי הגדרה

   (ב) לכל $a, b \in R$ מתקיים $-(a+b) = -a - b$
   פתרון : צ"ל להוכיח כי $a + b - a - b = 0$ בגלל חילופיות של החיבור

$$a + b - a - b = a - a + b - b = (a - a) + (b - b) = 0 + 0 = 0$$

   (ג) לכל $a, b \in R$ מתקיים $a(-b) = -(ab) = (-a)b$
   פתרון : צ"ל להוכיח כי $ab + a(-b) = 0 = ab + (-a)b$ בגלל תכונת הפילוג

$$ab + a(-b) = a(b - b) = a0 = 0$$

   וגם בצד השיוון השני מתקיים באופן דומה.

   (ד) לכל $a, b \in R$ מתקיים $(-a)(-b) = ab$
   פתרון : נשתמש בסעיפים קודמים

$$(-a)(-b) = [Ex.3] = (-(-a))b = [Ex.1] = ab$$

   (ה) לכל $a \in R$ מתקיים $(-a)^2 = a^2$
   פתרון : נשתמש בסעיף קודם עם $a = b$

$$(-a)^2 = (-a)(-a) = aa = a^2$$

2. יהיו R_1, R_2 שני חוגים. נגדיר את חוג המכפלה להיות הקבוצה $R_1 \times R_2$ עם חיבור וכפל רכיב רכיב כלומר

$$\forall (a,b), (x,y) \in R_1 \times R_2 : \ (a,b) + (x,y) = (a + x, b + y)$$

$$\forall (a,b), (x,y) \in R_1 \times R_2 : \ (a,b)(x,y) = (ax, by)$$

כאשר $a + x$ זהו חיבור של R_1, $b + y$ זהו חיבור של R_2. באופן דומה הכפלים המצוינים בשאלה מתייחסים לכפלים של R_1, R_2 לפי ההקשר. עובדה: זה אכן חוג. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם R_1, R_2 חוגים עם חילוק אז גם $R_1 \times R_2$
פתרון : לא למשל $R_1 = R_2 = \mathbb{Q}$ חוג עם חילוק אבל $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ אינו חוג עם חילוק כי ל $(1,0) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ אין הופכי. הוכחה, אחרת קיים (a,b) המקיים

$$(a,b)(1,0) = (1,1)$$

בפרט $b0 = 1$ שלא יתכן

(ב) אם R_1, R_2 חוגים עם יחידה אז גם $R_1 \times R_2$
פתרון : נכון. נסמן $1_{R_1}, 1_{R_2}$ ונראה כי $(1_{R_1}, 1_{R_2})$ הוא היחידה ב $R_1 \times R_2$.
אכן לכל $(a,b) \in R_1 \times R_2$ מתקיים

$$(a,b)(1_{R_1}, 1_{R_2}) = (a1_{R_1}, b1_{R_2}) = (a,b)$$

וגם

$$(1_{R_1}, 1_{R_2})(a,b) = (1_{R_1}a, 1_{R_2}b) = (a,b)$$

לפי הגדרת היחידות ב R_1 וב R_2

3. הוכיחו כי הבאים הם חוגים. קבעו האם אלו חוגים חילופיים, האם אלו חוגים עם יחידה והאם חוגים אלו עם חילוק.

(א) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \left\{a + b\sqrt{2} \,|a, b \in \mathbb{Z}\right\}$עם חיבור וכפל של מספרים שלמים (שימו לב שהקבוצה שהגדרנו היא תת קבוצה של המספרים הממשיים $\mathbb{R}$)
פתרון : נתחיל עם הטענה כי $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ביחס לחיבור היא חבורה כיוון שהיא תת קבוצה של הממשיים זה שקול להוכיח כי היא תת חבורה שלהם. נשתמש בקריטריון הקצר:
לכל $a + b\sqrt{2}, x + y\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ מתקיים

$$\left(a + b\sqrt{2}\right) - \left(x + y\sqrt{2}\right) = (a - x) + (b - y)\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$$

בנוסף $0 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
טענה הכפל ב $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ מוגדר וקיבוצי:
מוגדר: לכל $a + b\sqrt{2}, x + y\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ מתקיים

$$\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(x + y\sqrt{2}\right) = (ax + 2by) + (ay + bx)\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$$

קיבוציות: נובע מקיבוציות של מספרים ממשיים
פילוג/חילופיות־ גם נובע מפילוג/חילופיות של מספריים ממשיים.
בחוג $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ היחידה היא $1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$
החוג $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ אינו עם חילוק כי ל 2 אין הופכי. למה?
נניח בשלילה כי קיים $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ כך ש $2(a + b\sqrt{2}) = 1$ זה גורר כי $2a - 1 = b\sqrt{2}$ בצד ימין יש מספר שלם. ולכן גם המספר בצד משאל שלם. זה קורה אמ"מ $b = 0$. זה גורר $2a - 1 = 0$ כלומר $a = \frac{1}{2}$ סתירה לכך ש $a \in \mathbb{Z}$

(ב) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \left\{a + b\sqrt{2}\,|a, b \in \mathbb{Q}\right\}$עם חיבור וכפל של מספרים שלמים (שימו לב שהקבוצה שהגדרנו היא תת קבוצה של המספרים הממשיים $\mathbb{R}$)

פתרון : פתרון דומה לסעיף הקודם של $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. ההבדל הוא ש $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ הינו חוג עם חילוק (ובעצם שדה).

הוכחה: יהא $\left(a + b\sqrt{2}\right) \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \neq 0$ צריך למצוא לו הופכי כלומר $c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ המקיים

$$\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(c + d\sqrt{2}\right) = 1$$

זה שני משוואות בשני נעלמים c, d

$$\begin{aligned} ac + 2bd &= 1 \\ (ad + bc)\sqrt{2} &= 0\sqrt{2} \end{aligned}$$

זה מתרגם למערכת המשוואות:

$$\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

שיש לה פתרון אמ"מ $det(\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}) = a^2 - 2b^2 \neq 0$ וזה אכן המצב.

הוכחה: נניח בשלילה כי $a^2 - 2b^2 = 0$ זה גורר כי $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$ או $b = 0$

אם $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$ אז $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ סתירה.

אם $b = 0$ אז $a = 0$ גם כן ואז נקבל סתירה לכך ש $0 \neq \left(a + b\sqrt{2}\right)$

(ג) הקבוצה $R = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}\right\}$ עם כפל וחיבור מטריצות.

פתרון : נתחיל עם הטענה כי R ביחס לחיבור היא חבורה כיוון שהיא תת קבוצה של המטריצות זה שקול להוכיח כי היא תת חבורה שלהם. נשתמש בקריטריון הקצר:

לכל $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ מתקיים כי

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$$

בנוסף $0 \in R$.

טענה הכפל ב R מוגדר וקיבוצי:

מוגדר: לכל $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ מתקיים כי

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$$

קיבוציות: נובע מקיבוציות של מטריצות

פילוג־ גם נובע מפילוג של מטריצות.

R אינו חילופי כי =

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בחוג R אין יחידה

הוכחה: אחרת נסמן אותה ב $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. צריך להתקיים לכל $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אבל

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שזה לא אפשרי (אם נבחר את $a_1 = 1$ זה גורר כי $b_1 = b_2$ אבל b_1 יכול להיות כמה אפשריות)

כיוון ש R ללא יחידה אז הוא אינו חוג עם חילוק.

(ד) קבוצת הפונקציות מהממשיים לממשיים $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ is function}\}$ עם חיבור פונקציות $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ וכפל מטריצות המוגדר כמכפלה $(fg)(x) = f(x)g(x)$

פתרון : נתחיל עם הטענה כי R ביחס לחיבור היא חבורה חילופית.

חיבור פונקציות הוא מוגדר כי $f+g$ אכן פונקציה מהממשיים לממשיים לפי הגדרה.

חיבור פונקציות הוא חילופי כי $f+g = g+f$ כי $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (f+g)(x)$

הנטרלי ביחס לחיבור זה פונקציה האפס המוגדרת $0(x) = 0$ [אכן $f+g = g$ כי $(0+g)(x) = 0(x)+g(x) = 0+g(x) = g(x)$]

יש נגדי: לכל פונקציה $f \in R$ הפונקציה $g \in R$ המוגדרת $g(x) = -f(x)$ תהיה נגדית כי $g+f = 0$ [אכן $(g+f)(x) = g(x)+f(x) = -f(x)+f(x) = 0$]

בנוסף הכפל ב R מוגדר וקיבוצי. נובע ממוגדרות וקיבוציות ב $\mathbb{R}$

פילוג- יהיו $f,g,h \in R$ אזי $(f+g)h = fh+gh$ כי $(f+g)h(x) = (f+g)(x)h(x) = f(x)h(x)+g(x)h(x) = (fh)(x)+(gh)(x)$. וכן בצד השני.

R חילופי כי $fg = gf$ מחילופיות ב $\mathbb{R}$ ($f(x)g(x) = g(x)f(x)$ לכל x)

בחוג R יש יחידה וזוהי הפונקציה ששווה זהותי ל 1, כלומר $\mathbf{1}(x) = 1$

R אינו חוג עם חילוק כי למשל לפונקציה $f(x) = x^2$ אין הופכית. למה? נניח שיש אזי $gf = \mathbf{1}$ נבחר $x = 0$ ונקבל כי $\mathbf{1}(0) = 1 = gf(0) = g(0)f(0) = g(0) \cdot 0 = 0$. סתירה.

(ה) הקבוצה $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} :\ z, w \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}$ עם חיבור וכפל מטריצות.

פתרון : נתחיל עם הטענה כי $\mathbb{H}$ ביחס לחיבור היא חבורה חילופית.

חיבור מוגדר כי $\begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\bar{w}_1 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\bar{w}_2 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1+z_2 & w_1+w_2 \\ -\bar{w}_1-\bar{w}_2 & \bar{z}_1+\bar{z}_2 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} z_1+z_2 & w_1+w_2 \\ -\overline{(w_1+w_2)} & \overline{(z_1+z_2)} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$. בנוסף חיבור מטריצות הוא חילופי.

הנטרלי ביחס לחיבור זה מטריצת האפס שאכן שייכת ל $\mathbb{H}$

יש נגדי: לכל $\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$ הנגדי $-\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z & -w \\ \bar{w} & \overline{-z} \end{pmatrix} \in$
$\mathbb{H}$נמצא גם כן ב $\mathbb{H}$

בנוסף הכפל ב $\mathbb{H}$מוגדר כי

$$\begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\bar{w}_1 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\bar{w}_2 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1z_2 - w_1\bar{w}_2 & z_1w_2 + w_1\bar{z}_2 \\ -z_2\bar{w}_1 - \overline{z_1w_2} & -\bar{w}_1w_2 + \overline{z_1z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1z_2 - w_1\bar{w}_2 & z_1w_2 + w_1\bar{z}_2 \\ -\overline{z_1w_2 + w_1\bar{z}_2} & \overline{z_1z_2 - w_1\bar{w}_2} \end{pmatrix} \in$$

וקיבוצי כי הכפלת מטריצות היא קיבוצית

פילוג מתקיים כי חיבור וכפל מטריצות מקיים את תכונת הפילוג.

R אינו חילופי כי =

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$$

ואילו

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

בחוג R יש יחידה וזוהי מטריצת הזהות.

R הוא חוג עם חילוק. יהא $\begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\bar{w}_1 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$ מטריצה שונה מאפס. אזי הדטר' שלה היא

$$|z_1|^2 + |w_1|^2 \neq 0$$

ולכן היא הפיכה. נראה שההופכית גם שייכת ל $\mathbb{H}$. אכן

$$\begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\bar{w}_1 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|z_1|^2 + |w_1|^2} \begin{pmatrix} \bar{z}_1 & -w_1 \\ \bar{w}_1 & z_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$$