בוחן 1 מבנים אלגבריים הנדסה תשעח

26.11.2017

מתרגל: אחיה בר־און.

- ענו על 3 מתוך 4 שאלות.
- **כתבו בדף הראשון של המחברת את הת.ז. שלכם בצורה ברורה.**
- הקפידו על סדר ניקיון.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- נמקו כל תשובה.
- כל שאלה 34 נקודות.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות אותן אתם יודעים לפתור.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות עליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

1	
2	
3	
4	
total	

בהצלחה!

.1

(א) [18 נק'] נגדיר $a=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&6&5&4&3\end{pmatrix}\in S_6$

i. כיתבו את a,b כמכפלה של מחזורים זרים.

ii. כמה תמורות $x\in S_6$ קיימות המקיימות את השיוון $ax=b$? מצאו אותן.

(ב) [16 נק'] תהא $\sigma\in S_n$ ויהא $\sigma=\tau_1\cdots\tau_m$ הפירוק למחזורים זרים. הוכיחו כי $o(\sigma)=lcm\left\{o(\tau_i\right\}_{i=1}^{m}$.
(תזכורת: ה lcm (הכפולה המשותפת המינימאלית) של המספרים הטבעיים $a_1,\ldots,a_n$ הוא מספר טבעי d המקיים: 1) $d|a_i$ לכל $1\leq i\leq n$, ובנוסף: 2) לכל מספר טבעי d' המקיים $d'|a_i$ לכל $1\leq i\leq n$, מתקיים כי $d|d'$. למשל, $lcm\{2,8,20,10\}=40$).

.2

(א) [14 נק'] קבעו עבור כל אחת מהקבוצות והפעולות הבאות האם היא חבורה. במידה שמדובר בחבורה, מצאו את ההופכי של כל איבר.

i. המטריצות $G=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}\mid 0<a\in\mathbb{R},\, b\in\mathbb{R}\right\}$, עם פעולת כפל מטריצות רגיל.

ii. הטבעיים $G=\mathbb{N}$, עם הפעולה $a*b=a^b$.

(ב) [6 נק'] כמה יוצרים יש ל $\mathbb{Z}_6=\{\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5}\}$ (עם פעולת חיבור מדולו 6)?

(ג) [14 נק'] הוכיחו/הפריכו כי H היא ת"ח של G במקרים הבאים:

i. $H=\{a+ai\mid a\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{C}=G$ (הפעולה היא חיבור מספרים מרוכבים).

ii. $H=\{A\in\mathbb{F}^{n\times n}\mid\det(A)\neq 0\}\subseteq\mathbb{F}^{n\times n}=G$ (הפעולה היא חיבור מטריצות).

3. תזכורת: המרכז של חבורה G מוגדר כך: $Z(G)=\{x\in G|\,\forall g\in G:\; gx=xg\}$.

(א) [17 נק'] תהיינה G_1,G_2 חבורות. הוכיחו/הפריכו כי $Z(G_1)\times Z(G_2)=Z(G_1\times G_2)$.

(ב) [17 נק'] חשבו מפורשות את $Z(\mathbb{R}\times S_5)$ [כאשר $\mathbb{R}\times S_5$ היא חבורת המכפלה עם הפעולה המוגדרת כך: לכל $(x,\sigma),(x',\sigma')\in\mathbb{R}\times S_5$ הפעולה ביניהם היא $(x,\sigma)(x',\sigma')=(x+x',\sigma\circ\sigma')$].

.4

(א) [17 נק'] תהא G חבורה בה מתקיים $\forall g_1,g_2\in G:(g_1g_2)^2=g_1^2g_2^2$.
הוכיחו כי G חבורה קומוטטיבית.

(ב) [17 נק'] תהא G חבורה בה מתקיים $\forall g\in G: g^2=e$.
הוכיחו כי G חבורה קומוטטיבית.