

**בחינת סיום (מועד ג') בקורס**  
**מבנים אלגבריים להנדסה (83218)**  
 מרצה: פרופ' נתן קלר

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

נא לענות על 4 מתוך 5 השאלות. בכל שאלה, סעיף א' שווה 15 נקודות וסעיף ב' שווה 10 נקודות.  
 חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון בלבד.

בהצלחה!

שאלה 1

א. תהי  $G$  חבורה ותהיינה  $H_1, H_2$  תתי חבורות שלה כך שמתקיים  $|H_1| = 2019$  ו-  $|H_2| = 5780$ .  
 הוכיחו כי מתקיים  $H_1 \cap H_2 = \{e\}$ .

ב. תנו דוגמא לחבורה  $G$  בת  $n$  איברים, ומספר  $k$  שמחלק את  $n$ , כך שאין ל-  $G$  תת חבורה בגודל  $k$ .

שאלה 2

א. תהי  $(G, *)$  חבורה ותהיינה  $H_1, H_2$  תתי חבורות נורמליות שלה כך שמתקיים  $H_1 \cap H_2 = \{e\}$ .  
 הוכיחו כי לכל  $x \in H_1, y \in H_2$  מתקיים  $x * y = y * x$ .

ב. תנו דוגמא לחבורה לא קומוטטיבית  $G$  שאין לה שום תת חבורה נורמלית פרט ל-  $\{e\}$ .

שאלה 3

א. חשבו את ההפכי הכפלי של האיבר  $p(x) = x^2 + x + 1$  בשדה  $\mathbb{Z}_2[x] / \langle x^4 + x^3 + 1 \rangle$ .

ב. נסמן  $p(x) = x^7 + x^4 + x^3 + 1$  ו-  $q(x) = x^6 - 1$ . האם קיימים פולינומים  $a(x), b(x)$  כך שמתקיים  $a(x)p(x) + b(x)q(x) = x^2 + 2x + 2$ ?

שאלה 4

יהי  $R$  חוג קומוטטיבי. הוכיחו או הפריכו (על ידי דוגמא) את הטענות הבאות:

א. אוסף האיברים הנילפוטנטיים ב-  $R$  הוא תת חוג של  $R$ .

ב. אוסף האיברים הלא-הפיכים ב-  $R$  הוא תת חוג של  $R$ .

שאלה 5

יהי  $F$  שדה סופי בו מתקיים  $1 + 1 = 0$ , כאשר 1 הוא היחידה הכפלית ו-0 הוא היחידה החיבורית.

א. הוכיחו כי כל איבר בשדה זה הינו חזקה רביעית. כלומר, לכל  $x \in F$  קיים  $y \in F$  כך ש-  $y^4 = x$ .

ב. האם כל איבר בשדה הוא בהכרח חזקה שלישית? הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא. (דוגמא צריכה לכלול הוכחה לכך שאיבר מסוים אינו חזקה שלישית של אף איבר בשדה שבחרת).