תרגול 8:

תרגיל: (הכללה של משפט ליוביל)

תהי $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ שלמה המקיימת $\left|f(z)\right|\le K\left|z\right|^m$ עבור $K\ge 0, m\in\{0,1,2,...\}$ הוכיחו כי $f(z)$ היא פולינום ממעלה $\le m$.

פתרון: f שלמה ולכן יש לה פיתוח טיילור, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ עבור $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. ע"פ נוסחת קושי, $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz=\frac{\frac{n!}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-0)^{n+1}}dz}{n!}=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. נעריך את $|a_n|$ ע"י הערכות קושי

$$\frac{1}{2\pi}ML\ge\frac{1}{2\pi}\left|\int\right|=|a_n| \text{ כאשר } \frac{K}{R^{n+1-m}}=\max\frac{K|z|^m}{R^{n+1}}\le\max\frac{|f(z)|}{R^{n+1}}=\max_{|z|=R}\left|\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right|=M$$

$L=2\pi R$. כלומר $\frac{K}{R^{n-m}}=2\pi R\frac{K}{R^{n+1-m}}\frac{1}{2\pi}\le|a_n|$ אם $n>m$ מקבלים $|a_n|\le 0$ ע"י הגבול $R\to\infty$. נשארים עם $f(z)=\sum_{n=1}^{m}a_n z^n$ פולינום כנדרש.

תרגיל ממבחן (תשס"ח מועד ב)

5. תהי $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ פונקציה שלימה, כך שלכל $z\in\mathbb{R}$, $f(z)\in\mathbb{R}$. הוכיחו:

א. לכל $n$, $a_n\in\mathbb{R}$.

ב. לכל $z\in\mathbb{C}$, $f(\overline{z})=\overline{f}(z)$

פתרון:

א. עבור $x\in\mathbb{R}$ נוכל לרשום

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\operatorname{Re}a_n\right)x^n+i\sum_{n=0}^{\infty}\left(\operatorname{Im}a_n\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\operatorname{Re}a_n+i\operatorname{Im}a_n\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=f(x)$$ ומהנתון החלק המדומה מקיים $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\operatorname{Im}a_n\right)x^n\equiv 0$. מיחידות טור הטיילור הממשי (השוואת מקדמים) מקבלים $\operatorname{Im}a_n=0$ לכל $n$, כלומר $a_n$ ממשיים כולם.

ב. נעזר ב-א'. $\overline{f}(z)=\overline{f(z)}=\overline{\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{a_n z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{a_n}\,\overline{z}^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\overline{z}^n=f(\overline{z})$

תרגיל מאותו מבחן:

3. נגדיר $f(z)=\frac{1}{\cos z}-\frac{1}{e^{-z}-1}$. אם נפתח את $f(z)$ לטור חזקות מהסוג $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-2i)^n$
מה יהיה רדיוס ההתכנסות של הטור? נמקו את התשובה.

פתרון:

נשתמש במשפט הבא מן ההרצאה: העיגול המקסימלי בו טור החזקות המתאים ל- $f$ מתכנס הוא העיגול המקסימלי בו יש ל- $f$ הרחבה אנליטית.

שימו לב שאין צורך למצוא את הטור במפורש (וזה גם לא פשוט לעשות זאת). נבדוק היכן יש לפונקציה נקודות בעייתיות (סינגולריות).

$\cos z=0\Rightarrow z=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$ וגם $e^{-z}=1\Rightarrow -z=2\pi ik\Rightarrow z=2\pi ik, k\in\mathbb{Z}$.

הנקודה הסינגולרית הקרובה ביותר אל נקודת הפיתוח, $2i$ היא 0, ולכן $R=d(2i,0)=2$.

תרגיל:

א. פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ לטור טיילור סביב אפס. מהו רדיוס ההתכנסות?

ב. בעזרת א' חשבו את האינטגרלים $I_k:=\oint_{|z|=1/2}\frac{dz}{z^k(1+z^2)}$ עבור $k\in\mathbb{Z}$.

פתרון: נשתמש בפיתוח לטור הנדסי $f(z)=\frac{1}{1-(-z^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$.

הפיתוח תקף רק עבור $|-z^2|<1$ כלומר בעיגול $|z|<1$. מכאן $R=1$ (זהו גם המרחק בין אפס לסינגולריות הקרובה ביותר).

ב. אם $k\le 0$ הפונקציה באינטגרל אנליטית ומשפט אינטגרל קושי נותן $I_{k\le 0}=0$. נניח מעתה כי $k=1,2,3,...$. ע"פ נוסחת אינטגרל קושי $\oint_{|z|=1/2}\frac{dz}{z^k(1+z^2)}=\frac{2\pi i}{(k-1)!}f^{(k-1)}(0)$. שימו לב ש- $\frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}$ הוא המקדם של $z^{k-1}$ בפיתוח טיילור שלנו. לכן

$\frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}=\begin{cases}(-1)^n & k-1=2n\\ 0 & k-1=2n+1\end{cases}$ ובסה"כ $I_k=\begin{cases}2\pi i(-1)^n & k-1=2n\\ 0 & k-1=2n+1\end{cases}$.

תרגיל: תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בעיגול פתוח $\Delta(0,R)$. עוד נניח כי לכל $z\in\Delta$, $f(z)=f(-z)$ (פונקציה זוגית) הוכיחו שבפיתוח טיילור של $f$ סביב אפס, יש רק חזקות זוגיות.

פתרון: נרשום $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=a_0+a_1z+a_2z^2+\dots$, ואז $f(-z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-1)^nz^n=a_0-a_1z+a_2z^2-+\dots$ נחסר בין הטורים: $f(z)-f(-z)=2a_1z+2a_3z^3+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}2a_{2n+1}z^{2n+1}$. אגף שמאל מתאפס זהותית בעיגול, כלומר $\sum_{n=0}^{\infty}2a_{2n+1}z^{2n+1}\equiv 0$ שם. ע"פ יחידות טור הטיילור מקבלים $a_{2n+1}\equiv 0$ לכל $n$. כל החזקות האי זוגיות נופלות ונשארים עם $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}z^{2n}$.

הערה: ניתן להוכיח תוצאה דומה עבור פונקציות אי-זוגיות.

תרגיל: פתחו את הפונקציות הבאות לטור טיילור מהסוג $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$:

א. $e^z$ סביב $z_0=0$

ב. $e^z$ סביב $z_0$ כללית.

ג. $\sin z$ סביב $z_0=\pi$

פתרון:

א. $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

ב. $e^z=e^{z_0}e^{z-z_0}=e^{z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{z_0}\frac{(z-z_0)^n}{n!}$.

ג. $\sin z=\sin(\pi-z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\pi-z)^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n+1}$