מתמטיקה בדידה 88-195 תשע"ד

תרגיל בית מספר 8

מתרגלים: רועי בן-ארי ולידור אלדבח

1. תהיינה A,B קבוצות **אינסופיות** זרות כך ש- $|A|=a,|B|=b$ ו- $a\geq b$.

מצאו את העוצמות הבאות והציגו אותן בצורה הפשוטה ביותר:

א. $|P(A)\cup P(B)|$

ב. $|A\times P(A)\times P(P(A))|$

ג. $\left|A^{B^{A\times B}}\right|$

ד. $|A\setminus(B\times A)|$

פתרון: ע"פ הגדרות של פעולות (כפל, חיבור) על עוצמות ואריתמטיקה של עוצמות.

א. $P(A),P(B)$ זרות ולכן $|P(A)\cup P(B)|=|P(A)|+|P(B)|=2^a+2^b=2^a$ (השתמשנו בכך ש $2^a\geq 2^b$).

ב. $|A\times P(A)\times P(P(A))|=|A|\cdot|P(A)|\cdot|P(P(A))|=a\cdot 2^a\cdot 2^{2^a}=2^{2^a}$.

ג. $\left|A^{B^{A\times B}}\right|=a^{b^{a\cdot b}}=a^{b^a}=a^{2^a}=2^{2^a}$.

ד. טעות בשאלה.

2. מצאו את העוצמות של הקבוצות הבאות והוכיחו את תשובתכם:

א. $\mathbb{C}:=\{a+bi\mid a,b\in\mathbb{R}\}$ (קבוצת המספרים המרוכבים)

ב. $M_3(\mathbb{Q})$ (המטריצות מסדר 3 על 3 עם ערכים מ $\mathbb{Q}$)

בהינתן קבוצה A, פולינום במשתנה x מעל A הוא ביטוי מהצורה $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ כאשר $n\in\mathbb{N}$ ו- $a_n,\ldots,a_0\in A$.

נסמן את קבוצת הפולינומים במשתנה x מעל A ב- $A[x]$

ג. $\mathbb{Q}[x]$

ד. $C_0:=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f\ \ \{$ רציפה (קבוצת כל הפונקציות הרציפות מ- $\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{R}$)

רמז: היעזרו בעובדה שכל נקודה ב- $\mathbb{R}$ היא גבול של נקודות מ- $\mathbb{Q}$.

פתרון:

א. מספר איברי $\mathbb{C}$ הוא מספר האופציות לבחור מקדמים a,b ממשיים ל $a+bi$. כלומר $\aleph=\aleph\cdot\aleph$. פורמלית: נבנה פונקציה חח"ע ועל $f:\mathbb{C}\to\mathbb{R}^2$ לפי:

$f(a+bi)=(a,b)$

קל לראות כי זו פונקציה הפיכה (ההופכית היא $(a,b)\to a+bi$). ולכן $|\mathbb{C}|=|\mathbb{R}^2|=\aleph\cdot\aleph=\aleph$.

ב. כל מטריצה 3×3 כזו מורכבת מ9 ערכים מ $\mathbb{Q}$ (אחד בכל תא). לכן בסה"כ
$|M_3(\mathbb{Q})|=|\mathbb{Q}^9|=\aleph_0{}^9=\aleph_0$.

ג. לכל $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, נסמן $\mathbb{Q}_n[x]$ את קבוצת הפולינומים במשתנה x מעל $\mathbb{Q}$ ממעלה n. נשים לב כי מתקיים:

$$\mathbb{Q}[x]=\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathbb{Q}_n[x]$$

עתה נשים לב כי מספר הפולינומים ב$\mathbb{Q}_n[x]$ הוא מספר האופציות לבחור $n+1$ מקדמים רציונליים (אחד לכל חזקה של x בפולינום). כלומר
$|\mathbb{Q}_n[x]|=|\mathbb{Q}^n|=\aleph_0{}^n=\aleph_0$. לכן:

$$|\mathbb{Q}[x]|=\left|\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathbb{Q}_n[x]\right|=\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$$

ד. נשים לב כי כיוון שכל נקודה ב $\mathbb{R}$ היא גבול של נקודות מ $\mathbb{Q}$, אזי בהינתן פונקציה רציפה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא נקבעת ע"י הערכים שהיא מקבלת על $\mathbb{Q}$, כלומר ע"י הצמצום $f|_{\mathbb{Q}}:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ (שכן ניתן לשחזר את שאר הערכים שלה ע"י לקיחת גבול).
לכן אם נגדיר פונקציה $F:C_0\to\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ ע"י $F(f)=f|_{\mathbb{Q}}$, אזי F היא פונקציה חח"ע (אין שתי פונקציות רציפות שונות שהן זהות על כל $\mathbb{Q}$). לכן $|C_0|\le|\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}|=\aleph^{\aleph_0}=\aleph$.
עתה כמובן $|C_0|\ge\aleph$, כיוון שכל פונקציה לינארית היא רציפה, ויש $\aleph$ פונקציות לינאריות. לכן מקנטור ברנשטיין נובע $|C_0|=\aleph$.

3. נגדיר יחס שקילות $\approx$ על הקבוצה $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (קבוצה הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$) באופן הבא:
$f\approx g \Leftrightarrow f-g$ רציפה. לדוגמה, $x\approx 3x$ כי $-2x$ רציפה.

א. הוכיחו כי $\approx$ הוא יחס שקילות (אין צורך להוכיח טענות מאינפי' על אריתמטיקה של פונקציות רציפות).

ב. תהי פונקציה $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. מצאו את $|[f]_{\approx}|$ (רמז: עיון בשאלה הקודמת לא יכול להזיק).

ג. מצאו את $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/\approx\right|$.

פתרון:

א. רפלקסיביות: לכל $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f-f=0$ היא פונקציה רציפה ולכן $f\approx f$.
סימטריות: אם $f\approx g$, אזי $f-g$ רציפה ולכן גם $g-f$ רציפה כלומר $g\approx f$.
טרנזיטיביות: אם $f\approx g, g\approx h$, אזי $f-g, g-h$ שתיהן רציפות, ולכן גם סכומן $f-h$ רציפה, כלומר, $f\approx h$.

ב. תהי $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, ותהי $h \in [f]_{\approx}$. מתקיים $h-f$ רציפה. נביט בפונקציה $F:[f]_{\approx} \to C_0$ המוגדרת לי:

$$F(h)=h-f$$

זו פונקציה חח"ע ועל. נוכיח:

חח"ע: תהיינה $h_1,h_2 \in [f]_{\approx}$. ונניח $F(h_1)=F(h_2)$, אזי $h_1-f=h_2-f$ כלומר $h_1=h_2$.

על: תהי $g \in C_0$ רציפה, נרצה למצוא לה מקור. נביט ב $g+f$. מתקיים $g+f \in [f]_{\approx}$ כיוון ש $(g+f)-f=g$ פונקציה רציפה. ויתר על כן $F(g+f)=g+f-f=g$. לכן $g+f$ מקור של g .

כיוון ש F חח"ע ועל מתקיים $\left|[f]_{\approx}\right|=\left|C_0\right|=\aleph$.

ג. מצאנו כי מספר הפונקציות בכל מחלקת שקילות הוא $\aleph$, עלינו למצוא את מספר מחלקות השקילות $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/_{\approx}\right|$. עתה $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/_{\approx}\right|\cdot\aleph$ יתן את סך כל הפונקציות, כלומר $2^{\aleph}=\aleph^{\aleph}=\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right|=\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/_{\approx}\right|\cdot\aleph$, אבל מכך נובע ש $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/_{\approx}\right|=2^{\aleph}$.

4. סדרה חשבונית a_n ב- $\mathbb{Z}$ היא סדרה המקיימת $\forall n\in\mathbb{N}: a_{n+1}-a_n=d$ כאשר $d\in\mathbb{Z}$ קבוע.

דוגמה: $2,-1,-4,-7,-10,\ldots$ (במקרה זה $a_0=2$ ו- $d=-3$).

נסמן ב- באת קבוצת כל הסדרות החשבוניות.

א. מצאו את $\left|Seq(\mathbb{Z})\right|$.

ב. דני וחיים משחקים משחק: דני ממקם צפרדע בזמן $t=0$ בנקודה כלשהי ב- $\mathbb{Z}$. הצפרדע בכל תור קופצת d צעדים ימינה (כאשר $d\in\mathbb{Z}$ קבוע, ואם הוא שלילי המשמעות היא קפיצה שמאלה). נסמן את סדרת המיקומים של הצפרדע ב- t_n.
חיים בכל תור מנחש את מיקומה של הצפרדע. אם חיים מצליח בניחושו בזמן כלשהו הוא מנצח, אם הוא נכשל תמיד אז דני מנצח. מצאו אסטרטגיה מנצחת עבור חיים (כלומר שיטה שאם ינקוט בה תמיד ינצח).
רמז: סעיף א' יכול לעזור.

פתרון:

א. מספר הסדרות החשבוניות שווה למספר האופציות לבחור איבר ראשון, כפול מספר האופציות לבחור את הפרש הסדרה d, כלומר $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

ב. נרצה שלא משנה מהי הסדרה החשבונית t_n של מיקומי הצפרדע, תמיד נפגוש אותה באיזשהו שלב. כלומר נוכיח כי קיימת סדרה $a_n \in Seq(\mathbb{Z})$, אשר מקיימת שלכל סדרה $b_n \in Seq(\mathbb{Z})$, קיים n_0 טבעי כך ש $a_{n_0} = b_{n_0}$.

נבנה את הסדרה a_n באופן הבא:

הוכחנו בסעיף הקודם כי $|Seq(\mathbb{Z})| = \aleph_0$, כלומר מספר הסדרות החשבוניות הוא בן מנייה. נסדר את $Seq(\mathbb{Z})$ בסדרה T_n (זו סדרה של כל הסדרות החשבוניות) ועתה נגדיר את הסדרה a_n באופן

$$a_n := T_n(n)$$

(כלומר, a_n יקבל את הערך של הסדרה החשבונית ה n ית במקום ה n).

נוכיח כי אכן לכל $b_n \in Seq(\mathbb{Z})$, קיים n_0 טבעי עבורו $a_{n_0} = b_{n_0}$: תהי $b_n \in Seq(\mathbb{Z})$,

כיוון ש T_n היא סדרה של כל הסדרות החשבוניות קיים n_0 טבעי עבורו $T_{n_0} = (b_n)$.

עתה מתקיים:

$$a_{n_0} = T_{n_0}(n_0) = b_{n_0}$$

כנדרש.

עתה אסטרטגיה מנצחת עבור חיים היא כדלקמן: חיים יפעל כמו שהסדרה (a_n) תאמר לו. כלומר, בשלב ה n י, חיים יגיד את הערך a_n. עתה, לא משנה ע"פ איזו סדרה חשבונית t_n הצפרדע קופצת, מובטח לנו שקיים n_0 עבורו נקבל $a_{n_0} = t_{n_0}$, כלומר חיים ניחש נכון את מיקומה של הצפרדע.

בהצלחה!